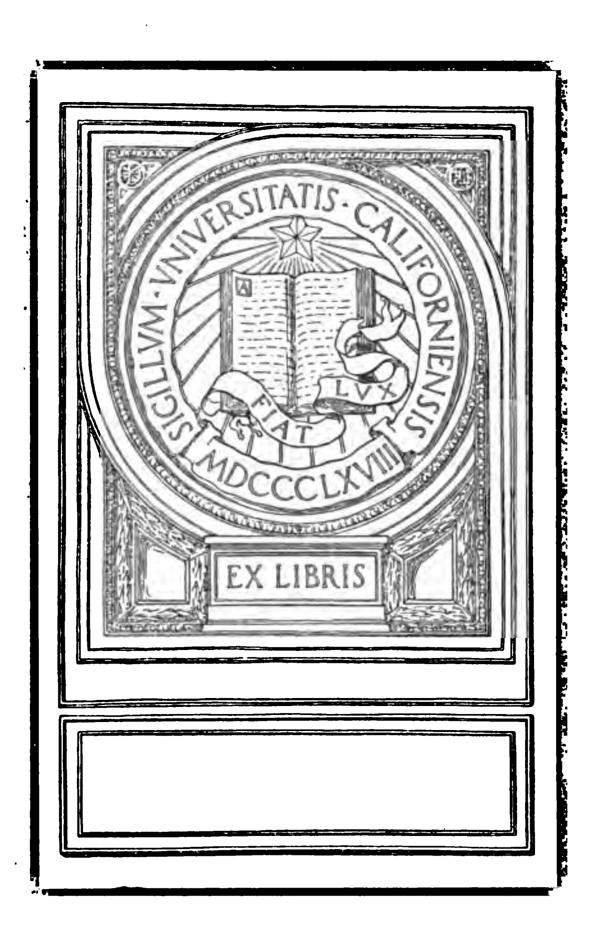


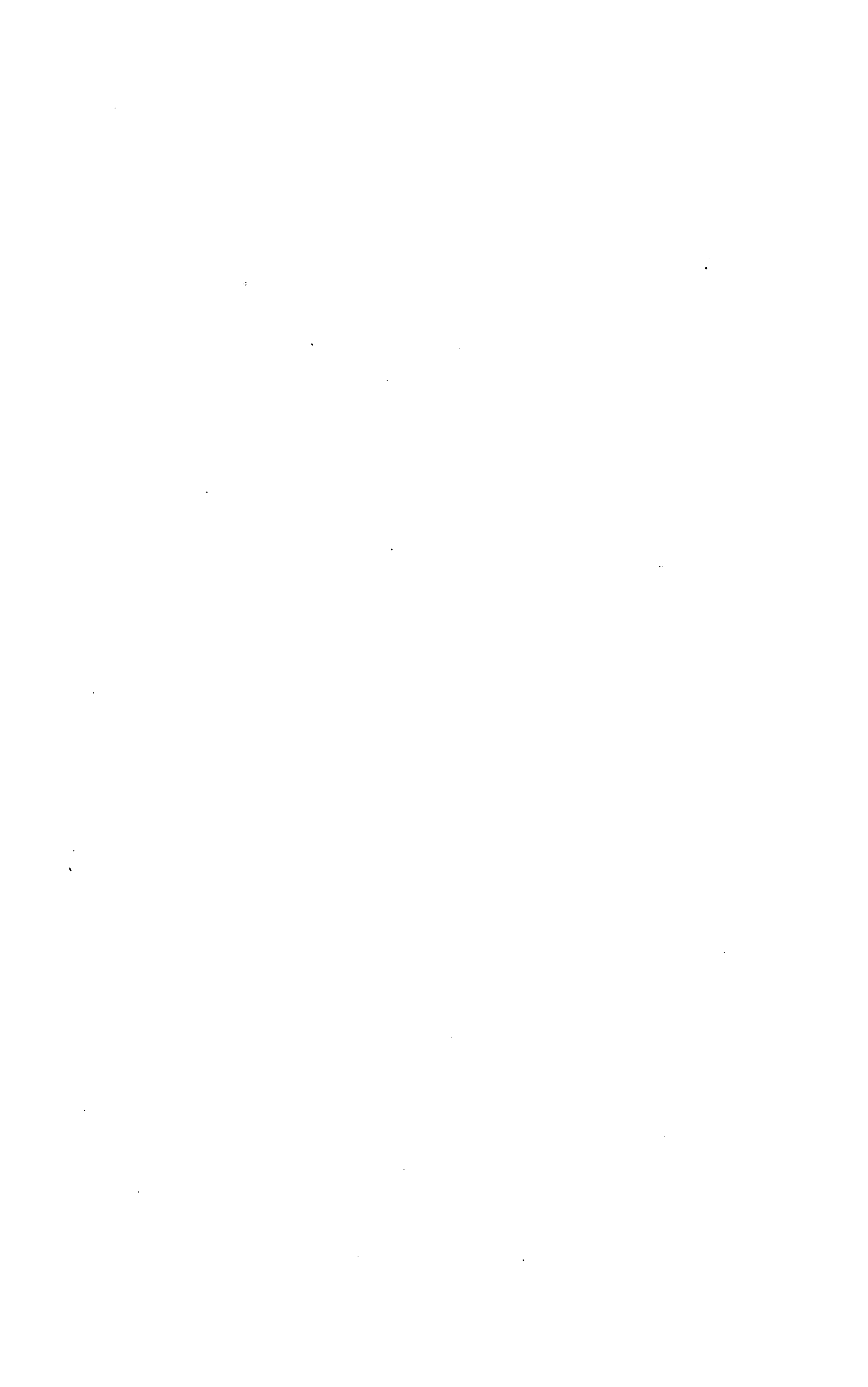
FORTSCHRITTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN MONOGRAPHIEN · HRSG. VON O. BLUMENTHAL
1

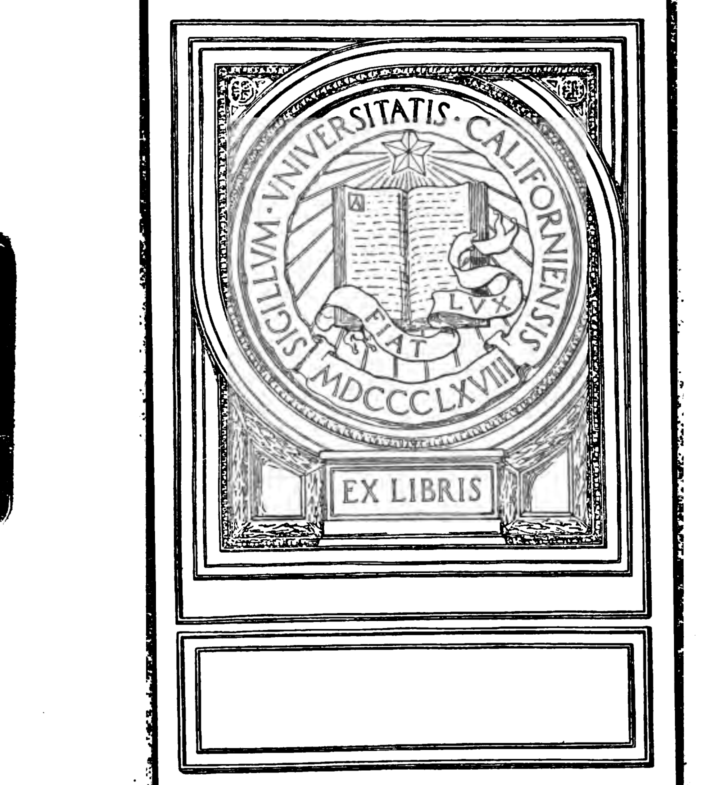
HERMANN MINKOWSKI

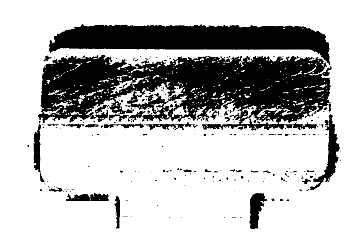
ZWEI ABHANDLUNGEN ÜBER DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER ELEKTRODYNAMIK

B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS




SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS





FORTSCHRITTE
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN MONOGRAPHIEN
HERAUSGEGEBEN VON OTTO BLUMENTHAL
HEFT 1

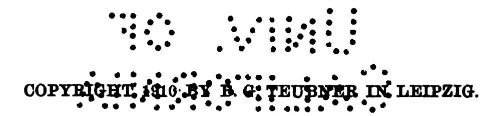
HERMANN MINKOWSKI

ZWEI ABHANDLUNGEN ÜBER DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER ELEKTRODYNAMIK

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT
VON OTTO BLUMENTHAL



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910



VORWORT.

Minkowski ist gestorben, nachdem er die Grundgleichungen der Relativitätstheorie hingeschrieben hatte. Es ist Aufgabe der jüngeren Generation, diese Gleichungen auf ihre Folgerungen zu prüfen und auf beobachtete Naturvorgänge anzuwenden.

Bereits wird von mehreren Seiten hier Hand angelegt. Dabei machte sich der Wunsch geltend, daß Minkowskis grundlegende Arbeiten in neuer, leicht zugänglicher Form herausgegeben werden möchten. Diesem Wunsche kommt die vorliegende Sonderausgabe nach, welche die neue Sammlung von Monographien für „Fortschritte der mathematischen Wissenschaften" bedeutungsvoll eröffnet. Die Ausgabe enthält außer den „Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern" auch eine „Ableitung der Grundgleichungen vom Standpunkte der Elektronentheorie", welche Herr Max Born bearbeitet hat. In der Tat hat Minkowski die in dieser Abhandlung enthaltenen Ergebnisse besessen, hat sie mit Born noch kurz vor seinem Tode mehrfach besprochen und auch anderen Fachgenossen mitgeteilt. Vor allem aber hat Herr Born aus Minkowskis handschriftlichem Nachlaß die Überzeugung gewonnen, daß seine Resultate wirklich Minkowskis Gedankengang treffen. Daher darf diese Arbeit wohl unter Minkowskis Namen gehen: das hindert aber nicht, daß Herrn Borns Bearbeitung eine durchaus selbständige Leistung ist, denn alle Einzelheiten der Entwicklungen rühren von ihm her.

Möge die Hoffnung sich erfüllen, daß durch diese Ausgabe auch weitere Kreise angeregt werden, sich in Minkowskis Ideen zu vertiefen und die Relativitätstheorie, jeder an seinem Teile, zu fördern, damit, nach Minkowskis kühnem Traum, nach Generationen im Bewußtsein des Menschengeschlechtes Raum und Zeit völlig zu Schatten herabsinken und nur noch die Raum-Zeit-Transformation lebendig bleibt.

Aachen, Mai 1910.

OTTO BLUMENTHAL.

INHALTSÜBERSICHT.

Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.

Von Hermann Minkowski.

Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Aus dem Nachlaß von Hermann Minkowski bearbeitet von Max Born in Göttingen.

Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.*)

Einleitung.

Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper herrschen zur Zeit noch Meinungsverschiedenheiten. Die Ansätze von Hertz**) (1890) mußten verlassen werden, weil sich herausgestellt hat, daß sie mit verschiedenen experimentellen Ergebnissen in Widerspruch geraten.

1895 publizierte H. A. Lorentz***) seine Theorie der optischen und elektrischen Erscheinungen in bewegten Körpern, die, auf atomistischer Vorstellung von der Elektrizität fußend, durch ihre großen Erfolge die kühnen Hypothesen, von denen sie getragen und durchsetzt wird, zu rechtfertigen scheint. Die Lorentzsche Theorie†) geht aus von gewissen ursprünglichen Gleichungen, die an jedem Punkte des „Äthers" gelten sollen, und gelangt daraus durch Mittelwertsbildungen über „physikalisch unendlich kleine" Bereiche, die schon zahlreiche „Elektronen" enthalten, zu den Gleichungen für die Vorgänge in ponderablen Körpern.

Insbesondere gibt sich die Lorentzsche Theorie Rechenschaft von der Nichtexistenz einer Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther; sie bringt diese Tatsache in Zusammenhang mit einer Kovarianz jener ursprünglichen Gleichungen bei gewissen gleichzeitigen Transformationen der Raum- und Zeitparameter, die von H. Poincaré††) den Namen *Lorentz-Transformationen* erhalten haben. Für jene ursprünglichen Gleichungen ist die Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen eine rein mathematische Tatsache, die ich das *Theorem der Relativität* nennen will; dieses Theorem beruht wesentlich auf der Gestalt der Differentialgleichung für die Fortpflanzung von Wellen mit Lichtgeschwindigkeit.

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., Sitzung vom 21. Dezember 1907.

**) Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wiedemanns Ann. 41, p. 369. 1890 (auch in: Ges. Werke Bd. I, p. 256. Leipzig 1892).

***) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

†) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. V 2, Art. 14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.

††) Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129.

Nun kann man, ohne noch zu bestimmten Hypothesen über den Zusammenhang von Elektrizität und Materie sich zu bekennen, erwarten, jenes mathematisch evidente Theorem werde seine Konsequenzen so weit erstrecken, daß dadurch auch die noch nicht erkannten Gesetze in bezug auf ponderable Körper irgendwie eine Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen übernehmen werden. Man äußert damit mehr eine Zuversicht, als bereits eine fertige Einsicht, und diese Zuversicht will ich das *Postulat der Relativität* nennen. Die Sachlage ist erst ungefähr eine solche, als wenn man die Erhaltung der Energie postuliert in Fällen, wo die auftretenden Formen der Energie noch nicht erkannt sind.

Gelangt man hernach dazu, die erwartete Kovarianz als einen bestimmten Zusammenhang zwischen lauter beobachtbaren Größen bei bewegten Körpern zu behaupten, so mag alsdann dieser bestimmte Zusammenhang das *Prinzip der Relativität* heißen.

Diese Unterscheidungen scheinen mir nützlich, um den gegenwärtigen Stand der Elektrodynamik bewegter Körper charakterisieren zu können.

H. A. Lorentz hat das Relativitätstheorem gefunden und das Relativitätspostulat geschaffen, als eine Hypothese, daß Elektronen und Materie infolge von Bewegung Kontraktionen nach einem gewissen Gesetze erfahren.

A. Einstein*) hat es bisher am schärfsten zum Ausdruck gebracht, daß dieses *Postulat* nicht eine künstliche Hypothese ist, sondern vielmehr eine durch die Erscheinungen sich aufzwingende neuartige Auffassung des Zeitbegriffs.

Das *Prinzip* der Relativität jedoch in dem von mir gekennzeichneten Sinne ist für die Elektrodynamik bewegter Körper bisher noch gar nicht formuliert worden. *In der gegenwärtigen Abhandlung erhalte ich, indem ich dieses Prinzip formuliere, die Grundgleichungen für bewegte Körper in einer durch dieses Prinzip völlig eindeutig bestimmten Fassung. Dabei wird sich zeigen, daß keine der bisher für diese Gleichungen angenommenen Formen sich diesem Prinzipe genau fügt.*

Man sollte vor allem erwarten, daß die von Lorentz angenommenen Grundgleichungen für bewegte Körper dem Relativitätspostulate entsprächen. Es zeigt sich indes, daß dieses nicht der Fall ist für die allgemeinen Gleichungen, die Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper hat, daß es aber allerdings *approximativ* (unter Vernachlässigung der Quadrate der Geschwindigkeiten der Materie gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit) der Fall ist für diejenigen Gleichungen, die Lorentz

---

*) Ann. d. Phys. 17, p. 891, 1905.

hernach für nichtmagnetisierte Körper erschließt; es kommt aber diese spätere Anpassung an das Relativitätspostulat wieder nur dadurch zustande, daß die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins ihrerseits in einer dem Relativitätspostulate nicht entsprechenden Weise angesetzt wird, also durch eine zufällige Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätspostulat. Indessen bedeutet diese Feststellung keinerlei Einwand gegen die molekulartheoretischen Hypothesen von Lorentz, sondern es wird nur klar, daß die Annahme der Kontraktion der Elektronen bei Bewegung in der Lorentzchen Theorie schon an einer früheren Stelle, als dieses durch Lorentz geschieht, eingeführt werden müßte.

In einem Anhange gehe ich noch auf die Stellung der klassischen Mechanik zum Relativitätspostulate ein. Eine leicht vorzunehmende Anpassung der Mechanik an das Relativitätspostulat würde für die beobachtbaren Erscheinungen kaum merkliche Differenzen ergeben, würde aber zu einem sehr überraschenden Erfolge führen: *Mit der Voranstellung des Relativitätspostulates schafft man sich genau das hinreichende Mittel, um hernach die vollständigen Gesetze der Mechanik allein aus dem Satze von der Erhaltung der Energie* (und Aussagen über die Formen der Energie) *zu entnehmen.*

§ 1.

Bezeichnungen.

Ein Bezugsystem x, y, z, t rechtwinkliger Koordinaten im Raume und der Zeit sei gegeben. Die Zeiteinheit soll in solcher Beziehung zur Längeneinheit gewählt sein, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume 1 ist.

Obwohl ich an sich vorziehen würde, die von Lorentz gebrauchten Bezeichnungen nicht zu ändern, scheint es mir doch wichtig, gewisse Zusammengehörigkeiten durch eine andere Wahl der Zeichen von vornherein hervortreten zu lassen. Ich werde den Vektor

der *elektrischen Kraft* $\mathfrak{E}$, der *magnetischen Erregung* $\mathfrak{M}$, der *elektrischen Erregung* $\mathfrak{e}$, der *magnetischen Kraft* $\mathfrak{m}$

nennen, so daß also $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ an die Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ bei Lorentz treten sollen.

Ich werde mich ferner des Gebrauchs komplexer Größen in einer Weise, wie dies bisher in physikalischen Untersuchungen noch nicht üblich war, bedienen, namentlich statt mit t mit der Verbindung it operieren, wobei i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeute. Andererseits werden ganz wesentliche Umstände in Evidenz treten, indem ich eine Schreibweise mit Indizes benutzen werde, nämlich oft an Stelle von

$$x, y, z, it \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4$$

setzen und hierauf einen allgemeinen Gebrauch der Indizes 1, 2, 3, 4 gründen werde. Dabei wird es sich, wie ich ausdrücklich hervorhebe, stets nur um eine *übersichtlichere Zusammenfassung rein reeller Beziehungen* handeln, und der Übergang zu reellen Gleichungen wird sich überall sofort vollziehen lassen, indem von den Zeichen mit Indizes solche mit *einem* Index 4 stets *rein imaginäre* Werte, solche mit *keinem* Index 4 oder mit *zwei* Indizes 4 stets *reelle* Werte bedeuten werden.

Ein einzelnes Wertsystem x, y, z, t bzw. x_1, x_2, x_3, x_4 soll ein *Raum-Zeitpunkt* heißen.

Ferner bezeichne $\mathfrak{w}$ den Vektor *Geschwindigkeit der Materie*, ε die *Dielektrizitätskonstante*, μ die *magnetische Permeabilität*, σ die *Leitfähigkeit* der Materie, sämtlich als Funktionen von x, y, z, t (oder x_1, x_2, x_3, x_4) gedacht, weiter ϱ die *elektrische Raumdichte*, $\mathfrak{s}$ einen Vektor „elektrischer Strom", zu dessen Definition wir erst in der Folge (in § 7 und 8) kommen werden.

Erster Teil.

Betrachtung des Grenzfalles Äther.

§ 2.

Die Grundgleichungen für den Äther.

Die Lorentzsche Theorie führt die Gesetze der Elektrodynamik der ponderablen Körper durch atomistische Vorstellungen von der Elektrizität zurück auf einfachere Gesetze; an diese einfacheren Gesetze knüpfen wir hier ebenfalls an, indem wir fordern, daß sie den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ der Gesetze für ponderable Körper bilden sollen. In diesem idealen Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ soll $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$ sein und sollen an jedem Raum-Zeitpunkte x, y, z, t die Gleichungen bestehen:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \varrho \mathfrak{w},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{m} = 0.$$

Ich will nun schreiben x_1, x_2, x_3, x_4 für x, y, z, it $(i = \sqrt{-1})$, weiter

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$$

für

$$\varrho \mathfrak{w}_x, \varrho \mathfrak{w}_y, \varrho \mathfrak{w}_z, i\varrho,$$

d. s. die Komponenten des Konvektionsstromes $\varrho\mathfrak{w}$ und die mit i multiplizierte Raumdichte der Elektrizität, ferner

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\quad f_{14},\quad f_{24},\quad f_{34}$$

für

$$\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z,$$

d. s. die Komponenten von $\mathfrak{m}$ bzw. $-i\mathfrak{e}$ nach den Achsen, endlich noch allgemein bei zwei der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes h, k

$$f_{kh} = -f_{hk},$$

also

$$f_{32} = -f_{23},\ f_{13} = -f_{31},\ f_{21} = -f_{12},$$
$$f_{41} = -f_{14},\ f_{42} = -f_{24},\ f_{43} = -f_{34}$$

festsetzen.

Alsdann schreiben sich die drei in (I) zusammengefaßten Gleichungen und die mit i multiplizierte Gleichung (II):

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned}
&\qquad\ \ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = \varrho_1,\\
&\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} \qquad\ \ + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = \varrho_2,\\
&\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} \qquad\ \ + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} = \varrho_3,\\
&\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} \qquad\ \ = \varrho_4.
\end{aligned}$$

Andererseits verwandeln sich die drei in (III) zusammengefaßten Gleichungen, mit $-i$ multipliziert, und die Gleichung (IV), mit -1 multipliziert, in

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}
&\qquad\ \ \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} = 0,\\
&\frac{\partial f_{43}}{\partial x_1} \qquad\ \ + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_4} = 0,\\
&\frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} \qquad\ \ + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} = 0,\\
&\frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} \qquad\ \ = 0.
\end{aligned}$$

Man bemerkt bei dieser Schreibweise sofort die *vollkommene Symmetrie* des ersten wie des zweiten dieser Gleichungssysteme *in bezug auf die Permutationen der Indizes* 1, 2, 3, 4.

§ 3.

Das Theorem der Relativität von Lorentz.

Die Schreibweise der Gleichungen (I)—(IV) in der Symbolik des Vektorkalküls dient bekanntermaßen dazu, eine Invarianz (oder besser

Kovarianz) des Gleichungssystems (A) wie des Gleichungssystems (B) bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt in Evidenz zu setzen. Nehmen wir z. B. eine Drehung um die z-Achse um einen festen Winkel φ vor unter Festhaltung der Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{w}$ im Raume, führen also anstatt x_1, x_2, x_3, x_4 neue Variabelen x_1', x_2', x_3', x_4' ein durch

$$x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,\; x_2' = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,\; x_3' = x_3,\; x_4' = x_4,$$

dazu neue Größen $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ durch

$$\varrho_1' = \varrho_1 \cos\varphi + \varrho_2 \sin\varphi,\; \varrho_2' = -\varrho_1 \sin\varphi + \varrho_2 \cos\varphi,\; \varrho_3' = \varrho_3,\; \varrho_4' = \varrho_4,$$

neue Größen $f_{12}', \ldots, f_{34}'$ durch

$$f_{23}' = f_{23} \cos\varphi + f_{31} \sin\varphi,\; f_{31}' = -f_{23} \sin\varphi + f_{31} \cos\varphi,\; f_{12}' = f_{12},$$
$$f_{14}' = f_{14} \cos\varphi + f_{24} \sin\varphi,\; f_{24}' = -f_{14} \sin\varphi + f_{24} \cos\varphi,\; f_{34}' = f_{34},$$
$$f_{kh}' = -f_{hk}' \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4),$$

so wird notwendig aus (A) das genau entsprechende System (A′), aus (B) das genau entsprechende System (B′) zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen folgen.

Nun läßt sich auf Grund der Symmetrie des Systems (A) *wie des Systems* (B) *in den Indizes 1, 2, 3, 4 sofort ohne jede Rechnung das von Lorentz gefundene Theorem der Relativität entnehmen.*

Ich will unter $i\psi$ eine rein imaginäre Größe verstehen und die Substitution

$$(1) \quad x_1' = x_1,\; x_2' = x_2,\; x_3' = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi,\; x_4' = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi$$

betrachten. Mittels

$$(2) \qquad -i \operatorname{tg} i\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q, \qquad \psi = \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \frac{1+q}{1-q}$$

wird

$$\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \qquad \sin i\psi = \frac{iq}{\sqrt{1-q^2}},$$

wobei $-1 < q < 1$ ausfällt und $\sqrt{1-q^2}$ mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist. Schreiben wir noch

$$(3) \qquad x_1' = x',\; x_2' = y',\; x_3' = z',\; x_4' = it',$$

so nimmt daher die Substitution (1) die Gestalt

$$(4) \qquad x' = x,\; y' = y,\; z' = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}},\; t' = \frac{-qz + t}{\sqrt{1-q^2}}$$

mit *lauter reellen Koeffizienten* an.

Ersetzen wir nun in den oben bei der Drehung um die z-Achse genannten Gleichungen überall 1, 2, 3, 4 durch 3, 4, 1, 2, und gleichzeitig φ durch $i\psi$, so erkennen wir, daß, wenn gleichzeitig mit dieser Substitution

(1) neue Größen $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ durch

$$\varrho_1'=\varrho_1,\ \varrho_2'=\varrho_2,\ \varrho_3'=\varrho_3\cos i\psi+\varrho_4\sin i\psi,\ \varrho_4'=-\varrho_3\sin i\psi+\varrho_4\cos i\psi,$$

neue Größen $f'_{12},\ldots,f'_{34}$ durch

$$f'_{41}=f_{41}\cos i\psi+f_{13}\sin i\psi,\ f'_{13}=-f_{41}\sin i\psi+f_{13}\cos i\psi,\ f'_{34}=f_{34},$$
$$f'_{32}=f_{32}\cos i\psi+f_{42}\sin i\psi,\ f'_{42}=-f_{32}\sin i\psi+f_{42}\cos i\psi,\ f'_{12}=f_{12},$$
$$f'_{kh}=-f'_{hk}\qquad (h,k=1,2,3,4)$$

eingeführt werden, alsdann ebenfalls das System (A) in das genau entsprechende System (A′), das System (B) in das genau entsprechende System (B′) zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen übergehen wird.

Alle diese Gleichungen lassen sich sofort in rein reelle Gestalt umschreiben und man kann das letzte Ergebnis so formulieren:

Wird die reelle Transformation (4) vorgenommen und werden hernach x', y', z', t' als ein Bezugsystem für Raum und Zeit angesprochen, werden zugleich

$$(5)\qquad \varrho'=\varrho\left(\frac{-q\mathfrak{w}_z+1}{\sqrt{1-q^2}}\right),\ \varrho'\mathfrak{w}'_{z'}=\varrho\left(\frac{\mathfrak{w}_z-q}{\sqrt{1-q^2}}\right),\ \varrho'\mathfrak{w}'_{x'}=\varrho\mathfrak{w}_x,\ \varrho'\mathfrak{w}'_{y'}=\varrho\mathfrak{w}_y,$$

ferner

$$(6)\qquad \mathfrak{e}'_{x'}=\frac{\mathfrak{e}_x-q\mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\quad \mathfrak{m}'_{y'}=\frac{-q\mathfrak{e}_x+\mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\quad \mathfrak{e}'_{z'}=\mathfrak{e}_z$$

und

$$(7)\qquad \mathfrak{m}'_{x'}=\frac{\mathfrak{m}_x+q\mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\quad \mathfrak{e}'_{y'}=\frac{q\mathfrak{m}_x+\mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\quad \mathfrak{m}'_{z'}=\mathfrak{m}_z$$

eingeführt*), so kommen hernach für die Vektoren $\mathfrak{w}', \mathfrak{e}', \mathfrak{m}'$ mit den Komponenten $\mathfrak{w}'_{x'}, \mathfrak{w}'_{y'}, \mathfrak{w}'_{z'}$; $\mathfrak{e}'_{x'}, \mathfrak{e}'_{y'}, \mathfrak{e}'_{z'}$; $\mathfrak{m}'_{x'}, \mathfrak{m}'_{y'}, \mathfrak{m}'_{z'}$ in dem neuen Koordinatensystem x', y', z' und dazu die Größe ϱ' genau die zu (I)—(IV) analogen Gleichungen (I′)—(IV′) zustande, und zwar geht für sich das System (I), (II) in (I′), (II′), das System (III), (IV) in (III′), (IV′) über.

Wir bemerken, daß hier $\mathfrak{e}_x-q\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{e}_y+q\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{e}_z$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{e}+[\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$ sind, wenn $\mathfrak{v}$ einen Vektor in Richtung der positiven z-Achse vom Betrage $|\mathfrak{v}|=q$ und $[\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$ das vektorielle Produkt der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{m}$ bedeutet. Analog sind dann $\mathfrak{m}_x+q\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{m}_y-q\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{m}_z$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{m}-[\mathfrak{v}\mathfrak{e}]$.

Die Gleichungen (6) und (7), wie sie paarweise *unter* einander stehen, können durch eine andere Verwendung imaginärer Größen in

*) Die Gleichungen (5) stehen hier in anderer Folge, die Gleichungen (6) und (7) aber in der nämlichen Folge wie die zuvor genannten Gleichungen, die auf sie hinauskommen.

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'} &= \quad (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\cos i\psi + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\sin i\psi, \\ \mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'} &= -(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\sin i\psi + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\cos i\psi, \\ \mathfrak{e}'_{z'} + i\mathfrak{m}'_{z'} &= \quad \mathfrak{e}_z + i\mathfrak{m}_z \end{aligned}$$

zusammengefaßt werden, und wir merken noch an, daß, wenn φ irgendeinen reellen Winkel bedeutet, aus diesen letzten Beziehungen ferner die Kombinationen

$$(8) \qquad \begin{aligned} &(\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'})\cos\varphi + (\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'})\sin\varphi \\ &= (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\cos(\varphi + i\psi) + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\sin(\varphi + i\psi), \end{aligned}$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} &-(\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'})\sin\varphi + (\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'})\cos\varphi \\ &= -(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\sin(\varphi + i\psi) + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\cos(\varphi + i\psi) \end{aligned}$$

hervorgehen.

§ 4.

Spezielle Lorentz-Transformationen.

Die Rolle, welche die z-Richtung in der Transformation (4) spielt, kann leicht auf eine beliebige Richtung übertragen werden, indem sowohl das Achsensystem der x, y, z wie das der x', y', z', jedes einer und der nämlichen Drehung in bezug auf sich unterworfen wird. Wir kommen damit zu einem allgemeineren Satze.

Es sei $\mathfrak{v}$ mit den Komponenten $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ ein gegebener Vektor mit einem solchen von Null verschiedenen Betrage $|\mathfrak{v}| = q$, *der kleiner als* 1 *ist,* von irgendeiner Richtung. Wir verstehen allgemein unter $\bar{\mathfrak{v}}$ eine beliebige auf $\mathfrak{v}$ senkrechte Richtung und bezeichnen ferner die Komponente eines Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Richtung $\mathfrak{v}$ oder einer Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$ mit $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$ bzw. $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$.

Anstatt x, y, z, t sollen nun neue Größen x', y', z', t' in folgender Weise eingeführt werden. Wird kurz $\mathfrak{r}$ für den Vektor mit den Komponenten x, y, z im ersten, ferner $\mathfrak{r}'$ für den Vektor mit den Komponenten x', y', z' im zweiten Bezugsystem geschrieben, so soll sein *für die Richtung von* $\mathfrak{v}$:

$$(10) \qquad \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt}{\sqrt{1 - q^2}},$$

für jede auf $\mathfrak{v}$ *senkrechte Richtung* $\bar{\mathfrak{v}}$:

$$(11) \qquad \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},$$

und ferner:

$$(12) \qquad = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + t}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Die Bezeichnungen $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}$ hier sind in dem Sinne zu verstehen, daß der Richtung $\mathfrak{v}$ und jeder zu $\mathfrak{v}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$ in x, y, z immer die Richtung mit den nämlichen Richtungskosinus in x', y', z' zugeordnet wird.

Eine Transformation, wie sie durch (10), (11), (12) mit der Bedingung $0 < q < 1$ dargestellt wird, will ich eine *spezielle Lorentz-Transformation* nennen, und soll $\mathfrak{v}$ der *Vektor*, die Richtung von $\mathfrak{v}$ die *Achse*, der Betrag von $\mathfrak{v}$ das *Moment* dieser speziellen Lorentz-Transformation heißen.

Werden weiter ϱ' *und die Vektoren* $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{m}'$ *in* x', y', z' *dadurch definiert, daß*

$$(13) \qquad \varrho' = \frac{\varrho(-q\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} + 1)}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$(14) \qquad \varrho'\mathfrak{w}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\varrho\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} - \varrho q}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \varrho'\mathfrak{w}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \varrho\mathfrak{w}_{\bar{\mathfrak{v}}},$$

ferner)*

$$(15) \qquad \begin{gathered} (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m})_{\bar{\mathfrak{v}}} = \frac{(\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}]_{\bar{\mathfrak{v}}}}{\sqrt{1-q^2}}, \\ (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\mathfrak{v}} \end{gathered}$$

ist, so folgt der Satz, daß das Gleichungssystem (I), (II) *und* (III), (IV) *jedesmal in das genau entsprechende System zwischen den mit Strichen versehenen Größen übergeht.*

Die Auflösung der Gleichungen (10), (11), (12) führt auf:

$$(16) \qquad \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + qt'}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}, \qquad t = \frac{q\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + t'}{\sqrt{1-q^2}}. \text{ —}$$

Wir schließen nun eine in der Folge sehr wichtige Bemerkung über die Beziehung der Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}'$ an. Es möge wieder die schon mehrfach gebrauchte Bezeichnung mit den Indizes 1, 2, 3, 4 herangezogen werden, so daß wir x_1', x_2', x_3', x_4' für x', y', z', it' und ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3', ϱ_4' für $\varrho'\mathfrak{w}'_{x'}$, $\varrho'\mathfrak{w}'_{y'}$, $\varrho'\mathfrak{w}'_{z'}$, $i\varrho'$ setzen. Wie eine Drehung um die z-Achse, so ist offenbar auch die Transformation (4) und allgemeiner die Transformation (10), (11), (12) eine solche *lineare Transformation* von der Determinante $+1$, *wodurch*

$$(17) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \text{ d. i. } x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2, \text{ d. i. } x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$$

übergeht.

*) Die runden Klammern sollen nur die Ausdrücke zusammenfassen, welche der Index betrifft, und $[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}]$ soll das vektorielle Produkt von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{e} + i\mathfrak{m}$ bedeuten.

Es wird daher auf Grund der Ausdrücke (13), (14) auch

$$-(\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2+\varrho_4^2)=\varrho^2(1-\mathfrak{w}_x^2-\mathfrak{w}_y^2-\mathfrak{w}_z^2)=\varrho^2(1-\mathfrak{w}^2)$$

in $\varrho'^2(1-\mathfrak{w}'^2)$ übergehen, oder mit andern Worten

$$\varrho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}, \tag{18}$$

wobei die Quadratwurzel positiv genommen sei, eine *Invariante* bei Lorentz-Transformationen sein.

Indem wir $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ durch diese Größe dividieren, entstehen die 4 Werte

$$w_1=\frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad w_2=\frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad w_3=\frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad w_4=\frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

zwischen welchen die Beziehung

$$w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2=-1 \tag{19}$$

besteht. Offenbar sind diese 4 Werte eindeutig durch den Vektor $\mathfrak{w}$ bestimmt, und umgekehrt folgt aus irgend 4 Werten w_1, w_2, w_3, w_4, wobei w_1, w_2, w_3 reell, $-iw_4$ reell und positiv ist und die Bedingung (19) statthat, rückwärts gemäß diesen Gleichungen eindeutig ein Vektor $\mathfrak{w}$ von einem Betrage < 1.

Die Bedeutung von w_1, w_2, w_3, w_4 hier ist, daß sie die Verhältnisse von dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 zu

$$\sqrt{-(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2)}=dt\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} \tag{20}$$

für die im Raum-Zeitpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 befindliche Materie beim Übergang zu zeitlich benachbarten Zuständen derselben Stelle der Materie sind. Nun übertragen sich die Gleichungen (10), (11), (12) sofort auf die zusammengehörigen Differentiale dx, dy, dz, dt und dx', dy', dz', dt' und insbesondere wird daher für sie

$$-(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2)=-(dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2+dx_4'^2)$$

sein. Nach Ausführung der Lorentz-Transformation ist im neuen Bezugsystem die Geschwindigkeit der Materie im nämlichen Raum-Zeitpunkte x', y', z', t' der Vektor $\mathfrak{w}'$ mit den Verhältnissen $\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$ als Komponenten auszulegen.

Nunmehr ist ersichtlich, daß das Wertsystem

$$x_1=w_1,\quad x_2=w_2,\quad x_3=w_3,\quad x_4=w_4$$

vermöge der Lorentz-Transformation (10), (11), (12) eben in dasjenige neue Wertsystem

$$x_1'=w_1',\quad x_2'=w_2',\quad x_3'=w_3',\quad x_4'=w_4'$$

übergeht, das für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}'$ *nach* der Transformation genau die Bedeutung hat wie das erstere Wertsystem für die Geschwindigkeit *vor* der Transformation.

Ist insbesondere der Vektor $\mathfrak{v}$ der speziellen Lorentz-Transformation gleich dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ der Materie im Raum-Zeitpunkte $x_1, x_2, x_3, x_4,$ so folgt aus (10), (11), (12):

$$w_1' = 0, \quad w_2' = 0, \quad w_3' = 0, \quad w_4' = i.$$

Unter diesen Umständen erhält also der betreffende Raum-Zeitpunkt nach der Transformation die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}' = 0$, er wird, wie wir uns ausdrücken können, *auf Ruhe transformiert.* Wir können danach die Invariante $\varrho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ passend als *Ruh-Dichte* der Elektrizität bezeichnen.

§ 5.

Raum-Zeit-Vektoren I^ter^ und II^ter^ Art.

Indem wir das Hauptergebnis bezüglich der speziellen Lorentz-Transformationen mit der Tatsache zusammennehmen, daß das System (A) wie das System (B) jedenfalls bei einer Drehung des räumlichen Bezugsystems um den Nullpunkt kovariant ist, erhalten wir das allgemeine *Theorem der Relativität.* Um es leicht verständlich zu formulieren, dürfte es zweckmäßig sein, zuvor eine Reihe von abkürzenden Ausdrücken festzulegen, während ich andererseits daran festhalten will, komplexe Größen zu verwenden, um bestimmte Symmetrien in Evidenz zu setzen.

Eine lineare homogene Transformation

$$(21)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' + \alpha_{14}x_4', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3' + \alpha_{24}x_4', \\ x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3' + \alpha_{34}x_4', \\ x_4 &= \alpha_{41}x_1' + \alpha_{42}x_2' + \alpha_{43}x_3' + \alpha_{44}x_4' \end{aligned}$$

von der Determinante $+1$, in welcher alle Koeffizienten ohne einen Index 4 reell, dagegen $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ sowie $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ rein imaginär (ev. Null), endlich α_{44} wieder reell und speziell > 0 ist und durch welche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ in } x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

übergeht, will ich allgemein eine *Lorentz-Transformation* nennen.

Wird

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = z', \quad x_4' = it'$$

gesetzt, so entsteht daraus sofort eine homogene lineare Transformation von x, y, z, t in x', y', z', t' mit lauter reellen Koeffizienten, wobei das Aggregat

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \text{ in } -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2$$

übergeht und einem jeden solchen Wertesystem x, y, z, t mit *positivem* t, wofür dieses Aggregat > 0 ausfällt, stets auch ein *positives* t' entspricht; letzteres ist aus der Kontinuität des Aggregats in x, y, z, t leicht ersichtlich.

Die letzte Vertikalreihe des Koeffizientensystems von (21) hat die Bedingung

$$\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1 \tag{22}$$

zu erfüllen.

Sind $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{34} = 0$, so ist $\alpha_{44} = 1$ und die Lorentz-Transformation reduziert sich auf eine bloße Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Sind $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ nicht sämtlich Null und setzt man

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = \mathfrak{v}_x : \mathfrak{v}_y : \mathfrak{v}_z : i,$$

so folgt aus (22) der Betrag

$$q = \sqrt{\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2} < 1.$$

Andererseits kann man zu jedem Wertesystem $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$, das in dieser Weise mit reellen $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ die Bedingung (22) erfüllt, die *spezielle* Lorentz-Transformation (16) mit $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$ als letzter Vertikalreihe konstruieren und jede Lorentz-Transformation mit der nämlichen letzten Vertikalreihe der Koeffizienten kann alsdann zusammengesetzt werden aus dieser speziellen Lorentz-Transformation und einer sich daran anschließenden Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen bildet eine *Gruppe*.

Unter einem *Raum-Zeit-Vektor* I. Art soll verstanden werden ein beliebiges System von vier Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ mit der Vorschrift, bei jeder Lorentz-Transformation (21) es durch dasjenige System $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ zu ersetzen, das aus (21) für die Werte x_1', x_2', x_3', x_4' hervorgeht, wenn für x_1, x_2, x_3, x_4 die Werte $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ genommen werden.

Verwenden wir neben dem variabeln Raum-Zeit-Vektor I. Art x_1, x_2, x_3, x_4 einen zweiten solchen variabeln Raum-Zeit-Vektor I. Art u_1, u_2, u_3, u_4 und fassen die bilineare Verbindung

$$\begin{aligned} &f_{23}(x_2 u_3 - x_3 u_2) + f_{31}(x_3 u_1 - x_1 u_3) + f_{12}(x_1 u_2 - x_2 u_1) \\ &+ f_{14}(x_1 u_4 - x_4 u_1) + f_{24}(x_2 u_4 - x_4 u_2) + f_{34}(x_3 u_4 - x_4 u_3) \end{aligned} \tag{23}$$

mit sechs Koeffizienten $f_{23}, \cdots, f_{34}$ auf. Wir bemerken, daß diese einerseits sich in vektorieller Schreibweise aus den vier Vektoren

$$x_1, x_2, x_3; \quad u_1, u_2, u_3; \quad f_{23}, f_{31}, f_{12}; \quad f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

und den Konstanten x_4 und u_4 aufbauen läßt, andererseits symmetrisch in den Indizes 1, 2, 3, 4 ist. Indem wir x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4

gleichzeitig gemäß der Lorentz-Transformation (21) substituieren, geht (23) in eine Verbindung

$$(24)\quad \begin{aligned} &f'_{23}(x_2'u_3' - x_3'u_2') + f'_{31}(x_3'u_1' - x_1'u_3') + f'_{12}(x_1'u_2' - x_2'u_1') \\ &+ f'_{14}(x_1'u_4' - x_4'u_1') + f'_{24}(x_2'u_4' - x_4'u_2') + f'_{34}(x_3'u_4' - x_4'u_3') \end{aligned}$$

mit gewissen allein von den sechs Größen $f_{23}, \cdots, f_{34}$ und den sechzehn Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{44}$ abhängenden sechs Koeffizienten $f'_{23}, \cdots, f'_{34}$ über.

Einen *Raum-Zeit-Vektor II. Art* definieren wir als ein System von sechs Größen $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$ mit der Vorschrift, es bei jeder Lorentz-Transformation durch dasjenige neue System $f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}$ zu ersetzen, das dem eben erörterten Zusammenhange der Form (23) mit der Form (24) entspricht.

Das allgemeine Theorem der Relativität betreffend die Gleichungen (I)—(IV), die „Grundgleichungen für den Äther", spreche ich nunmehr folgendermaßen aus.

Werden x, y, z, it (Raumkoordinaten und Zeit $\times\, i$) *einer beliebigen Lorentz-Transformation unterworfen und gleichzeitig* $\varrho\mathfrak{w}_x, \varrho\mathfrak{w}_y, \varrho\mathfrak{w}_z, i\varrho$ (Konvektionsstrom und Ladungsdichte $\times\, i$) *als Raum-Zeit-Vektor I. Art, ferner* $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z, -i\mathfrak{e}_x, -i\mathfrak{e}_y, -i\mathfrak{e}_z$ (magnetische Kraft und elektrische Erregung $\times -i$) *als Raum-Zeit-Vektor II. Art transformiert, so geht das System der Gleichungen* (I), (II) *und das System der Gleichungen* (III), (IV) *je in das System der entsprechend lautenden Beziehungen zwischen den entsprechenden neu eingeführten Größen über.*

Kürzer mag diese Tatsache auch mit den Worten angedeutet werden: Das System der Gleichungen (I), (II) wie das System der Gleichungen (III), (IV) ist kovariant bei jeder Lorentz-Transformation, wobei $\varrho\mathfrak{w}$, $i\varrho$ als Raum-Zeit-Vektor I. Art, $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ als Raum-Zeit-Vektor II. Art zu transformieren ist. Oder noch prägnanter:

$\varrho\mathfrak{w}, i\varrho$ *ist ein Raum-Zeit-Vektor I. Art,* $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ *ist ein Raum-Zeit-Vektor II. Art.*

Ich füge noch einige Bemerkungen hier an, um die Vorstellung eines Raum-Zeit-Vektors II. Art zu erleichtern. *Invarianten* für einen solchen Vektor $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ bei der Gruppe der Lorentz-Transformationen sind offenbar

$$(25)\qquad \mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2,$$

$$(26)\qquad \mathfrak{m}\mathfrak{e} = i(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}).$$

Ein Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ (wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ reelle Raum-Vektoren sind), mag *singulär* heißen, wenn das skalare Quadrat $(\mathfrak{m} - i\mathfrak{e})^2 = 0$, d. h. $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = 0$ und zugleich $(\mathfrak{m}\mathfrak{e}) = 0$ ist, d. h. *die Vektoren* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{e}$ *gleichen Betrag haben und zudem senkrecht aufeinander stehen.* Wenn solches der Fall ist, bleiben diese zwei Eigenschaften für den Raum-Zeit-Vektor II. Art bei jeder Lorentz-Transformation erhalten.

Ist der Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ *nicht singulär*, so drehen wir zunächst das räumliche Koordinatensystem so, daß das Vektorprodukt $[\mathfrak{m}\mathfrak{e}]$ in die z-Achse fällt, daß $\mathfrak{m}_z = 0$, $\mathfrak{e}_z = 0$ ist. Dann ist

$$(\mathfrak{m}_x - i\mathfrak{e}_x)^2 + (\mathfrak{m}_y - i\mathfrak{e}_y)^2 \neq 0,$$

also $\frac{\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x}$ verschieden von $\pm i$ und wir können daher ein komplexes Argument $\varphi + i\psi$ derart bestimmen, daß

$$\operatorname{tg}(\varphi + i\psi) = \frac{\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x}$$

ist. Alsdann wird mit Rücksicht auf die Gleichung (9) durch die zu ψ gehörige Transformation (1) und eine nachherige Drehung um die z-Achse durch den Winkel φ eine Lorentz-Transformation bewirkt, nach der auch noch $\mathfrak{m}_y = 0$, $\mathfrak{e}_y = 0$ werden, also nunmehr $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ beide in die neue x-Linie fallen; dabei sind durch die Invarianten $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2$ und $(\mathfrak{m}\mathfrak{e})$ die schließlichen Größen dieser Vektoren und ob sie von gleicher oder entgegengesetzter Richtung werden oder einer Null wird, von vornherein fixiert.

§ 6.

Begriff der Zeit.

Durch die Lorentz-Transformationen werden gewisse Abänderungen des Zeitparameters zugelassen. Infolgedessen ist es nicht mehr statthaft, von der *Gleichzeitigkeit* zweier Ereignisse an sich zu sprechen. Die Verwendung dieses Begriffes setzt vielmehr voraus, daß die Freiheit der 6 Parameter, die zur Angabe eines Bezugsystems für Raum und Zeit offen steht, bereits in gewisser Weise auf eine Freiheit von nur 3 Parametern eingeschränkt ist. Nur weil wir gewohnt sind, diese Einschränkung stark approximativ eindeutig zu treffen, halten wir den Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse als an sich existierend.*) In Wahrheit aber sollen folgende Umstände zutreffen.

Ein Bezugsystem x, y, z, t für Raum-Zeitpunkte (Ereignisse) sei irgendwie bekannt. Wird ein Raumpunkt $A(x_0, y_0, z_0)$ zur Zeit $t_0 = 0$ mit einem anderen Raumpunkte $P(x, y, z)$ zu einer anderen Zeit t verglichen und ist die Zeitdifferenz $t - t_0$ (es sei etwa $t > t_0$) *kleiner* als die Länge AP, d. i. die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von A nach P braucht, und ist q der Quotient $\frac{t - t_0}{AP} < 1$, so können wir durch die spezielle Lorentz-Transformation, die AP als Achse und q als Moment

*) Ungefähr wie Wesen, gebannt an eine enge Umgebung eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, darauf verfallen könnten, die Kugel sei ein geometrisches Gebilde, an welchem ein Durchmesser an sich ausgezeichnet ist.

hat, einen neuen Zeitparameter t' einführen, der (s. Gleichung (12) in § 4) für beide Raum-Zeitpunkte A, t_0 und P, t den gleichen Wert $t' = 0$ erlangt; es lassen sich also diese zwei Ereignisse auch als gleichzeitig auffassen.

Nehmen wir weiter zu einer und derselben Zeit $t_0 = 0$ zwei verschiedene Raumpunkte A, B oder drei Raumpunkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, und vergleichen damit einen Raumpunkt P außerhalb der Geraden AB oder der Ebene ABC zu einer anderen Zeit t und ist die Zeitdifferenz $t - t_0$ (es sei etwa $t > t_0$) *kleiner* als die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von der Geraden AB oder der Ebene ABC nach P braucht, und q der Quotient aus der ersteren und der letzteren Zeit, so erscheinen nach Anwendung der speziellen Lorentz-Transformation, die als Achse das Lot auf AB, bzw. ABC durch P und als Moment q hat, alle drei (beziehungsweise vier) Ereignisse A, t_0; B, t_0; (C, t_0) und P, t als gleichzeitig.

Werden jedoch vier Raumpunkte, die nicht in einer Ebene liegen, zu einer und derselben Zeit t_0 aufgefaßt, so ist es nicht mehr möglich, durch eine Lorentz-Transformation eine Abänderung des Zeitparameters vorzunehmen, ohne daß der Charakter der Gleichzeitigkeit dieser vier Raum-Zeitpunkte verloren geht.

Dem Mathematiker, der an Betrachtungen über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten und andererseits an die Begriffsbildungen der sogenannten nicht-Euklidischen Geometrie gewöhnt ist, kann es keine wesentliche Schwierigkeit bereiten, den Begriff der Zeit an die Verwendung der Lorentz-Transformationen zu adaptieren. Dem Bedürfnisse, sich das Wesen dieser Transformationen physikalisch näher zu bringen, kommt der in der Einleitung zitierte Aufsatz von A. Einstein entgegen.

Zweiter Teil.

Die elektromagnetischen Vorgänge.

§ 7.

Die Grundgleichungen für ruhende Körper.

Nach diesen vorbereitenden Ausführungen, die wir des etwas geringeren mathematischen Apparates wegen an dem idealen Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ entwickelten, wenden wir uns jetzt zu den Gesetzen für die elektromagnetischen Vorgänge in der Materie. Wir suchen diejenigen Beziehungen, die es — unter Voraussetzung geeigneter Grenzdaten — ermöglichen, an jedem Orte und zu jeder Zeit, also als Funktionen von x, y, z, t zu finden: die Vektoren der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$, der magne-

tischen Erregung $\mathfrak{M}$, der elektrischen Erregung $\mathfrak{e}$, der magnetischen Kraft $\mathfrak{m}$, die elektrische Raumdichte ϱ, den Vektor „elektrischer Strom $\mathfrak{s}$“ (dessen Beziehung zum Leitungsstrom hernach durch die Art des Auftretens der Leitfähigkeit zu erkennen sein wird), endlich den Vektor $\mathfrak{w}$, die Geschwindigkeit der Materie.

Die fraglichen Beziehungen scheiden sich in zwei Klassen,

erstens diejenigen Gleichungen, die, wenn der Vektor $\mathfrak{w}$ als Funktion von x, y, z, t gegeben, also die Bewegung der Materie bekannt ist, zur Kenntnis aller anderen eben genannten Größen als Funktionen von x, y, z, t hinführen, — diese erste Klasse speziell will ich die *Grundgleichungen* nennen, —

zweitens die Ausdrücke für die *ponderomotorischen Kräfte*, die durch Heranziehen der Gesetze der Mechanik weiter Aufschluß über den Vektor $\mathfrak{w}$ als Funktion von x, y, z, t bringen.

Für den Fall *ruhender Körper*, d. i. wenn $\mathfrak{w}(x, y, z, t) = 0$ gegeben ist, kommen die Theorien von Maxwell (Heaviside, Hertz) und von Lorentz zu den nämlichen Grundgleichungen. Es sind dies

1) die *Differentialgleichungen*, die noch keine auf die Materie bezüglichen Konstanten enthalten:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0;$$

2) weitere Beziehungen, die den Einfluß der vorhandenen Materie charakterisieren; sie werden in dem wichtigsten Falle, auf den wir uns hier beschränken, für isotrope Körper, angesetzt in der Gestalt

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{e} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = \mu \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E},$$

wobei ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit der Materie als Funktionen von x, y, z und t bekannt zu denken sind. $\mathfrak{s}$ ist hier als *Leitungsstrom* anzusprechen.

Ich lasse nun an diesen Gleichungen wieder durch eine veränderte Schreibweise eine noch versteckte Symmetrie hervortreten. Ich setze wie in den vorangeschickten Ausführungen

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = it$$

und schreibe

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4$$

für

$$\mathfrak{s}_x, \; \mathfrak{s}_y, \; \mathfrak{s}_z, \; i\varrho,$$

ferner

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$$

für

$$\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z$$

und noch

$$F_{23},\ F_{31},\ F_{12},\ F_{14},\ F_{24},\ F_{34}$$

für

$$\mathfrak{M}_x,\ \mathfrak{M}_y,\ \mathfrak{M}_z,\ -i\mathfrak{E}_x,\ -i\mathfrak{E}_y,\ -i\mathfrak{E}_z;$$

endlich soll für andere Paare von ungleichen, der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes h, k stets

$$f_{kh} = -f_{hk},\quad F_{kh} = -F_{hk}$$

gelten. (Die Buchstaben f, F sollen an das Wort Feld, s an Strom erinnern.)

Dann schreiben sich die Gleichungen (I), (II) um in

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = s_1,\\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} &\phantom{+ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = s_2,\\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} &+ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} \phantom{+ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} = s_3,\\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} &+ \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} \phantom{+ \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}} = s_4,
\end{aligned}$$

und die Gleichungen (III), (IV) schreiben sich um in

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} = 0,\\
\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} &\phantom{+ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} = 0,\\
\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &+ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} \phantom{+ \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} = 0,\\
\frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} &+ \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} \phantom{+ \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4}} = 0.
\end{aligned}$$

§ 8.

Die Grundgleichungen für bewegte Körper.

Nunmehr wird es uns gelingen, die Grundgleichungen für beliebig bewegte Körper in eindeutiger Weise festzustellen, ausschließlich mittels folgender drei Axiome:

Das *erste* Axiom soll sein:

Wenn eine einzelne Stelle der Materie in einem Momente ruht, also der Vektor $\mathfrak{w}$ für ein System x, y, z, t Null ist, — die Umgebung mag in irgendwelcher Bewegung begriffen sein —, so sollen für den Raum-

Zeitpunkt x, y, z, t zwischen ϱ, den Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ und deren Ableitungen nach x, y, z, t genau die Beziehungen (A), (B), (V) statthaben, die zu gelten hätten, falls alle Materie ruhte.

Das *zweite* Axiom soll sein:

Jede Geschwindigkeit der Materie ist < 1, *kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume.*

Das *dritte* Axiom soll sein:

Die Grundgleichungen sind von solcher Art, daß, wenn x, y, z, it *irgendeiner Lorentz-Transformation unterworfen und dabei einerseits* $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$, *andererseits* $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$, *je als Raum-Zeit-Vektor* II. *Art*, $\mathfrak{s}$, $i\varrho$ *als Raum-Zeit-Vektor* I. *Art transformiert werden, die Gleichungen dadurch in die genau entsprechend lautenden Gleichungen zwischen den transformierten Größen übergehen.*

Dieses dritte Axiom deute ich auch kurz mit den Worten an:

$\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ *und* $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ *sind je ein Raum-Zeit-Vektor* II. *Art*, $\mathfrak{s}$, $i\varrho$ *ein Raum-Zeit-Vektor* I. *Art*,

und dieses Axiom nenne ich das *Prinzip der Relativität.*

Diese drei Axiome führen uns in der Tat von den vorhin genannten Grundgleichungen für ruhende Körper in eindeutiger Weise zu den Grundgleichungen für bewegte Körper.

Nämlich nach dem zweiten Axiom ist in jedem Raum-Zeitpunkte der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $|\mathfrak{w}| < 1$. Infolgedessen können wir dem Vektor $\mathfrak{w}$ stets umkehrbar eindeutig das Quadrupel von Größen

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$$

zuordnen, zwischen denen die Beziehung

$$27) \qquad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

statthat. Aus den Ausführungen am Schlusse des § 4 ist ersichtlich, daß dieses Quadrupel sich bei Lorentz-Transformationen als Raum-Zeit-Vektor I. Art verhält, und wir wollen es den *Raum-Zeit-Vektor Geschwindigkeit* nennen.

Fassen wir nun eine bestimmte Stelle x, y, z der Materie zu einer bestimmten Zeit t auf. Ist in diesem Raum-Zeitpunkte $\mathfrak{w} = 0$, so haben wir für ihn nach dem ersten Axiom unmittelbar die Gleichungen (A), (B), (V) aus § 7. Ist in ihm $\mathfrak{w} \neq 0$, so existiert, weil $|\mathfrak{w}| < 1$ ist, nach (16) eine spezielle Lorentz-Transformation, deren Vektor $\mathfrak{v}$ gleich diesem Vektor $\mathfrak{w}(x, y, z, t)$ ist, und wir gehen allgemein zu einem neuen Bezugsystem x', y', z', t' gemäß dieser bestimmten Transformation über. Für den betrachteten Raum-Zeitpunkt entstehen dabei, wie wir in § 4 sahen, die neuen Werte

$$(28) \qquad w_1' = 0, \quad w_2' = 0, \quad w_3' = 0, \quad w_4' = i,$$

und also der neue Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}' = 0$, *der Raum-Zeitpunkt wird*, wie wir uns dort ausdrückten, *auf Ruhe transformiert.* Nun sollen nach dem dritten Axiom aus den Grundgleichungen für den Raum-Zeitpunkt x, y, z, t dabei die Grundgleichungen für das entsprechende System x', y', z', t', geschrieben in den transformierten Größen $\mathfrak{w}', \varrho', \mathfrak{s}', \mathfrak{e}', \mathfrak{m}', \mathfrak{E}', \mathfrak{M}'$ und deren Differentialquotienten nach x', y', z', t' hervorgehen. Diese letzteren Gleichungen aber müssen, nach dem ersten Axiom, weil jetzt $\mathfrak{w}' = 0$ ist, genau sein:

1) diejenigen Differentialgleichungen (A'), (B'), die aus (A) und (B) einfach dadurch hervorgehen, daß alle Buchstaben dort mit einem oberen Strich versehen werden,

2) die Gleichungen

$$(\mathrm{V}') \qquad \mathfrak{e}' = \varepsilon \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{M}' = \mu \mathfrak{m}', \quad \mathfrak{s}' = \sigma \mathfrak{E}',$$

wobei ε, μ, σ Dielektrizitätskonstante, magnetische Permeabilität, Leitfähigkeit für das System x', y', z', t', d. i. also im betrachteten Raum-Zeitpunkte x, y, z, t der Materie sind.

Jetzt gehen wir durch die reziproke Lorentz-Transformation rückwärts zu den ursprünglichen Variabelen x, y, z, t und den Größen $\mathfrak{w}, \varrho, \mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ und die Gleichungen, die wir dann aus den eben genannten erhalten, werden die von uns gesuchten allgemeinen Grundgleichungen für bewegte Körper sein.

Nun ist aus den Ausführungen in § 4 und § 5 zu ersehen, daß sowohl das Gleichungssystem (A) für sich wie das Gleichungssystem (B) für sich kovariant bei den Lorentz-Transformationen ist; d. h. die Gleichungen, die wir von (A'), (B') rückwärts erlangen, müssen genau gleichlauten mit den Gleichungen (A), (B), wie wir sie für ruhende Körper annahmen. Wir haben also als erstes Ergebnis:

Von den Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper lauten die Differentialgleichungen, geschrieben in ϱ und den Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ genau wie für ruhende Körper. Die Geschwindigkeit der Materie tritt in diesen Gleichungen noch nicht auf. In vektorieller Schreibweise sind diese Gleichungen also wieder

$$(\mathrm{I}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$(\mathrm{IV}) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0.$$

Die Geschwindigkeit der Materie wird ausschließlich auf die Zusatz-

bedingungen verwiesen, welche den Einfluß der Materie auf Grund ihrer speziellen Konstanten ε, μ, σ charakterisieren. Transformieren wir jetzt diese Zusatzbedingungen (V') zurück auf die ursprünglichen Koordinaten x, y, z und die ursprüngliche Zeit t.

Nach den Formeln (15) in § 4 ist für die Richtung des Vektors $\mathfrak{w}$ die Komponente von $\mathfrak{e}'$ dieselbe wie von $\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$, die von $\mathfrak{m}'$ dieselbe wie von $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, für jede dazu senkrechte Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$ aber ist die Komponente von $\mathfrak{e}'$ bzw. $\mathfrak{m}'$ gleich der entsprechenden Komponente von $\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$ bzw. von $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, jedesmal multipliziert noch mit $\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$. Andererseits werden $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{M}'$ hier zu $\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ und $\mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ in den ganz analogen Beziehungen stehen wie $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{m}'$ zu $\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$ und $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$. So führt die Relation $\mathfrak{e}' = \varepsilon\mathfrak{E}'$, indem man bei den Vektoren zuerst die Komponenten nach der Richtung $\mathfrak{w}$, dann diejenigen nach zwei zu $\mathfrak{w}$ und aufeinander senkrechten Richtungen $\bar{\mathfrak{w}}$ behandelt und die in letzteren Fällen entstehenden Gleichungen mit $\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ multipliziert, zu

$$\text{(C)} \qquad \mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}] = \varepsilon(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]).$$

Die Relation $\mathfrak{M}' = \mu\mathfrak{m}'$ wird analog auf

$$\text{(D)} \qquad \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu(\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}])$$

hinauslaufen.

Weiter folgt nach den Transformationsgleichungen (12), (10), (11) in § 4, indem dort q, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$, t, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}$, t' durch $|\mathfrak{w}|$, $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}$, $\mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}}$, ϱ, $\mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}}$, $\mathfrak{s}'_{\bar{\mathfrak{w}}}$, ϱ' zu ersetzen sind,

$$\varrho' = \frac{-|\mathfrak{w}|\,\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} + \varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \qquad \mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\,\varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \qquad \mathfrak{s}'_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}},$$

so daß aus $\mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}'$ nunmehr

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\,\varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} &= \sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])_{\mathfrak{w}}, \\ \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}} &= \frac{\sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])_{\bar{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} \end{aligned}$$

hervorgeht. Nach der Art, wie hier die Leitfähigkeit σ eingeht, wird es angemessen sein, den Vektor $\mathfrak{s} - \varrho\mathfrak{w}$ mit den Komponenten $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \varrho|\mathfrak{w}|$ nach der Richtung $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}}$ nach den auf $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtungen $\bar{\mathfrak{w}}$, der für $\sigma = 0$ verschwindet, als *Leitungsstrom* zu bezeichnen.

Wir bemerken, daß für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ die Gleichungen $\mathfrak{e}' = \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'$ durch die reziproke Lorentz-Transformation, die hier die spezielle mit $-\mathfrak{w}$ als Vektor wird, gemäß (15) sofort zu $\mathfrak{e} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$ führen und daß für $\sigma = 0$ die Gleichung $\mathfrak{s}' = 0$ zu $\mathfrak{s} = \varrho\mathfrak{w}$ führt, so daß in der Tat als Grenzfall der hier erhaltenen Gleichungen für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ sich die in § 2 betrachteten „Grundgleichungen für den Äther“ ergeben.

§ 9.

Die Grundgleichungen in der Theorie von Lorentz.

Sehen wir nun zu, inwieweit die Grundgleichungen, die Lorentz annimmt, dem Relativitätspostulate, das soll heißen dem in § 8 formulierten Relativitätsprinzipe entsprechen. In dem Artikel „Elektronentheorie" (Enzykl. der math. Wiss., Bd. V 2, Art. 14) hat Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper zunächst die Differentialgleichungen (s. dort S. 209 unter Berücksichtigung von Gl. XXX' daselbst und von Formel (14) auf S. 78 desselben Heftes):

$$\text{(IIIa}'') \qquad \operatorname{curl}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) = \mathfrak{J} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{D} - \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}],$$

$$\text{(I}'') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IV}'') \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(V}'') \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Dann setzt Lorentz für bewegte nicht magnetisierte Körper (S. 223, Z. 3) $\mu = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ und nimmt dazu das Eingehen der Dielektrizitätskonstante ε und der Leitfähigkeit σ gemäß

$$\text{(Gl. XXXIV}''', \text{ S. 227)} \qquad \mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]),$$

$$\text{(Gl. XXXIII}'', \text{ S. 223)} \qquad \mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])$$

an. Die Lorentzschen Zeichen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ sind hier durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ ersetzt, während $\mathfrak{J}$ bei Lorentz als Leitungsstrom bezeichnet wird.

Die drei letzten der zitierten Differentialgleichungen nun decken sich sofort mit den Gleichungen (II), (III), (IV) hier, die erste Gleichung aber würde, indem wir $\mathfrak{J}$ mit dem für $\sigma = 0$ verschwindenden Strome $\mathfrak{s} - \mathfrak{w}\varrho$ identifizieren, in

$$(29) \qquad \operatorname{curl}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) = \mathfrak{s} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}]$$

übergehen und verschieden von (I) hier ausfallen. Danach entsprechen die allgemeinen Differentialgleichungen von Lorentz für beliebig magnetisierte Körper *nicht* dem Relativitätsprinzipe.

Andererseits würde die dem Relativitätsprinzipe entsprechende Form für die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins aus (D) in § 8 mit $\mu = 1$ *nicht* wie bei Lorentz als $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, sondern als

$$(30) \qquad \mathfrak{B} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{H} - [\mathfrak{w}\mathfrak{D}] \quad (\text{hier } \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}])$$

anzunehmen sein. Nun geht aber die zuletzt hingeschriebene Differentialgleichung (29) durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ in dieselbe Gleichung (abgesehen von der Verschiedenheit der Zeichen) über, in welche (I) hier sich durch

$\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ verwandeln würde. So kommt es durch eine Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätsprinzip zustande, daß für nicht magnetisierte bewegte Körper die Differentialgleichungen von Lorentz sich zuletzt dem Relativitätsprinzipe doch anpassen.

Macht man weiter für nicht magnetisierte Körper von (30) hier Gebrauch und setzt demgemäß $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]$, so würde zufolge (C) in § 8

$$(\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]) = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}[\mathfrak{w}, \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]]$$

anzunehmen sein, d. i. für die Richtung von $\mathfrak{w}$:

$$(\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\mathfrak{w}} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\mathfrak{w}},$$

und für jede zu $\mathfrak{w}$ senkrechte Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$:

$$(\varepsilon - 1)(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\bar{\mathfrak{w}}} = (1 - \mathfrak{w}^2)(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\bar{\mathfrak{w}}},$$

d. i. mit der oben genannten Lorentzschen Annahme nur in Übereinstimmung bis auf Fehler von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ gegen 1.

Auch nur mit dem gleichen Grade der Annäherung entspricht der oben genannte Lorentzsche Ansatz für $\mathfrak{J}$ den durch das Relativitätsprinzip geforderten Beziehungen (vgl. (E) in § 8), daß die Komponenten $\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}$ bzw. $\mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{w}}}$ gleich den entsprechenden Komponenten von $\sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])$, multipliziert in $\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$ bzw. in $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}}$ seien.

§ 10.

Die Grundgleichungen nach E. Cohn.

E. Cohn*) nimmt folgende Grundgleichungen an:

$$\text{(31)} \quad \begin{aligned} \operatorname{curl}(M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{J}, \\ -\operatorname{curl}(E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

$$\text{(32)} \quad \mathfrak{J} = \sigma E, \quad \mathfrak{E} = \varepsilon E - [\mathfrak{w} M], \quad \mathfrak{M} = \mu M + [\mathfrak{w} E],$$

wobei E, M als elektrische und magnetische Feldintensität (Kraft), $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ als elektrische und magnetische Polarisation (Erregung) aufgefaßt werden. Die Gleichungen lassen noch das Vorhandensein von wahrem Magnetismus zu; wollen wir davon absehen, so ist $\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0$ zu setzen.

Ein Einwand gegen diese Gleichungen ist, daß nach ihnen für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ nicht die Vektoren Kraft und Erregung zusammenfallen. Fassen wir jedoch in den Gleichungen nicht E und M, sondern $E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ und $M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ als elektrische und magnetische Kraft auf und substituieren

*) Gött. Nachr. 1901, S. 74 (auch in Ann. d. Phys. 7 (4), 1902, p. 29).

im Hinblick hierauf für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, E, M, div $\mathfrak{E}$ die Zeichen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$, $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, ϱ, so gehen zunächst die Differentialgleichungen in unsere Gleichungen über und zugleich verwandeln die Bedingungen (32) sich in

$$\mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]),$$

$$\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]] = \varepsilon(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]),$$

$$\mathfrak{M} - [\mathfrak{w}, \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]] = \mu(\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]);$$

damit würden in der Tat diese Gleichungen von Cohn bis auf Fehler von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ gegen 1 genau die durch das Relativitätsprinzip geforderten werden.

Erwähnt sei noch, daß die von Hertz angenommenen Gleichungen (in den Bezeichnungen von Cohn) lauten wie (31) mit den anderen Zusatzbedingungen

$$\mathfrak{E} = \varepsilon E, \quad \mathfrak{M} = \mu M, \quad \mathfrak{J} = \sigma E; \tag{33}$$

und dieses Gleichungssystem würde auch nicht bei irgendwelcher veränderten Bezugnahme der Zeichen auf beobachtbare Größen sich dem Relativitätsprinzipe bis auf Fehler von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ gegen 1 anpassen.

§ 11.

Typische Darstellung der Grundgleichungen.

Bei der Aufstellung der Grundgleichungen leitete uns der Gedanke, für sie eine Kovarianz bezüglich der Gruppe der Lorentz-Transformationen zu erzielen. Jetzt haben wir noch die ponderomotorischen Wirkungen und die Umsetzung der Energie im elektromagnetischen Felde zu behandeln, und da kann es von vornherein nicht zweifelhaft sein, daß die Erledigung dieser Fragen jedenfalls zusammenhängen wird mit den einfachsten, an die Grundgleichungen anknüpfenden Bildungen, die wieder Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen zeigen. Um auf diese Bildungen hingewiesen zu werden, will ich vor allem die Grundgleichungen jetzt in eine *typische Form* bringen, *die ihre Kovarianz bei der Lorentzschen Gruppe in Evidenz setzt.* Dabei bediene ich mich einer Rechnungsmethode, die ein abgekürztes Operieren mit den Raum-Zeit-Vektoren I. und II. Art bezweckt, und deren Regeln und Bezeichnungen, soweit sie für uns nützlich sein werden, ich hier zuvörderst zusammenstelle.

1⁰. Ein System von Größen

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1q} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1}, \ldots, a_{pq} \end{vmatrix},$$

angeordnet in p Horizontal-, q Vertikalreihen, heiße eine $p \times q$-reihige *Matrix**) und werde mit einem einzigen Zeichen, etwa hier A, bezeichnet.

Werden alle Größen a_{hk} mit dem nämlichen Faktor c multipliziert, so soll die entstehende Matrix der Größen ca_{hk} mit cA bezeichnet werden.

Werden die Rollen der Horizontal- und Vertikalreihen in A vertauscht, so erhält man eine $q \times p$-reihige Matrix, welche *die transponierte* von A heißt und mit $\bar{A}$ bezeichnet werden soll:

$$\bar{A} = \left| \begin{matrix} a_{11}, \ldots, a_{p1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{1q}, \ldots, a_{pq} \end{matrix} \right|.$$

Hat man eine zweite Matrix *mit gleichen Anzahlen* p und q, wie A,

$$B = \left| \begin{matrix} b_{11}, \ldots, b_{1q} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1}, \ldots, b_{pq} \end{matrix} \right|,$$

so soll $A + B$ die ebenfalls $p \times q$-reihige Matrix aus den entsprechenden Binomen $a_{hk} + b_{hk}$ bedeuten.

2⁰. Hat man zwei Matrizen

$$A = \left| \begin{matrix} a_{11}, \ldots, a_{1q} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1}, \ldots, a_{pq} \end{matrix} \right|, \qquad B = \left| \begin{matrix} b_{11}, \ldots, b_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{q1}, \ldots, b_{qr} \end{matrix} \right|,$$

wobei die Anzahl der Horizontalreihen der zweiten gleich der Anzahl der Vertikalreihen der ersten ist, so wird unter AB, dem *Produkte* aus A und B, die Matrix

$$C = \left| \begin{matrix} c_{11}, \ldots, c_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ c_{p1}, \ldots, c_{pr} \end{matrix} \right|,$$

verstanden, deren Elemente durch Kombination der Horizontalreihen von A und der Vertikalreihen von B nach der Regel

$$c_{hk} = a_{h1} b_{1k} + a_{h2} b_{2k} + \cdots + a_{hq} b_{qk} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

gebildet sind. Für solche Punkte gilt das *assoziative* Gesetz $(AB)S = A(BS)$; hierbei ist unter S eine dritte Matrix gedacht mit so viel Horizontalreihen, als B (und damit auch AB) Vertikalreihen hat.

Für die transponierte Matrix zu $C = AB$ gilt $\bar{C} = \bar{B}\bar{A}$.

3⁰. Es werden hier nur Matrizen in Betracht kommen mit höchstens vier Horizontalreihen und höchstens vier Vertikalreihen.

---

*) Man könnte auch daran denken, statt des Cayleyschen Matrizenkalküls den Hamiltonschen Quaternionenkalkül heranzuziehen, doch erscheint mir der letztere für unsere Zwecke als zu eng und schwerfällig.

Als *Einheitsmatrix* (und in Gleichungen für Matrizen kurzweg mit 1) werde die 4×4-reihige Matrix der folgenden Elemente

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13}, & e_{14} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}, & e_{24} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}, & e_{34} \\ e_{41}, & e_{42}, & e_{43}, & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Für ein Vielfaches $c \cdot 1$ der Einheitsmatrix (in dem unter 1° festgesetzten Sinne einer Matrix cA) soll dann in Gleichungen für Matrizen kurzweg c stehen.

Für eine 4×4-reihige Matrix A soll Det A die Determinante aus den 4×4 Elementen der Matrix bedeuten. Ist dann Det $A \neq 0$, so gehört zu A eine bestimmte *reziproke* Matrix, mit A^{-1} bezeichnet, so daß $A^{-1} A = 1$ wird. —

Eine Matrix

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher die Elemente die Relationen $f_{kh} = -f_{hk}$ erfüllen, heißt eine *alternierende* Matrix. Diese Relationen besagen, daß die transponierte Matrix $\bar{f} = -f$ ist. Alsdann werde mit f^* und als die *duale* Matrix von f die ebenfalls alternierende Matrix

$$(35) \qquad f^* = \begin{vmatrix} 0, & f_{34}, & f_{42}, & f_{23} \\ f_{43}, & 0, & f_{14}, & f_{31} \\ f_{24}, & f_{41}, & 0, & f_{12} \\ f_{32}, & f_{13}, & f_{21}, & 0 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Dabei wird

$$(36) \qquad f^* f = f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34},$$

das soll nun heißen eine 4×4-reihige Matrix, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten Null sind und alle Elemente in dieser Diagonale untereinander übereinstimmen und gleich der hier rechts genannten Verbindung aus den Koeffizienten von f sind. Die Determinante von f erweist sich dann als das Quadrat dieser Verbindung und wir wollen das Zeichen $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$ eindeutig als die Abkürzung

$$(37) \qquad \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f = f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34}$$

erklären.

4°. Eine lineare Transformation

$$x_h = \alpha_{h1} x_1' + \alpha_{h2} x_2' + \alpha_{h3} x_3' + \alpha_{h4} x_4' \qquad (h = 1, 2, 3, 4) \tag{38}$$

werde auch einfach durch die 4×4-reihige Matrix der Koeffizienten

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34} \\ \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

als Transformation A, bezeichnet. Durch die Transformation A geht der Ausdruck

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

in die quadratische Form

$$\Sigma a_{hk} x_h' x_k' \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

über, wobei

$$a_{hk} = \alpha_{1h}\alpha_{1k} + \alpha_{2h}\alpha_{2k} + \alpha_{3h}\alpha_{3k} + \alpha_{4h}\alpha_{4k}$$

wird, d. h. die 4×4-reihige (symmetrische) Matrix der Koeffizienten a_{hk} dieser Form wird das Produkt $\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A}$ der transponierten Matrix von A in die Matrix A. Soll also durch die Transformation der neue Ausdruck

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

hervorgehen, so muß

$$\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} = 1 \tag{39}$$

die Matrix 1 werden. Dieser Relation hat demnach A zu entsprechen, wenn die Transformation (38) eine Lorentz-Transformation sein soll. Für die Determinante von A folgt aus (39): $(\mathrm{Det}\, \mathsf{A})^2 = 1$, $\mathrm{Det}\, \mathsf{A} = \pm 1$. Die Bedingung (39) kommt zugleich auf

$$\mathsf{A}^{-1} = \bar{\mathsf{A}} \tag{40}$$

hinaus, d. h. die reziproke Matrix von A muß sich mit der transponierten von A decken.

Für A als Lorentz-Transformation haben wir noch weiter die Bestimmungen getroffen, daß $\mathrm{Det}\, \mathsf{A} = +1$ sei, daß jede der Größen α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{41}, α_{42}, α_{43} rein imaginär (bzw. Null), die anderen Koeffizienten in A reell seien und endlich noch $\alpha_{44} > 0$ sei.

5°. Ein Raum-Zeit-Vektor I. Art s_1, s_2, s_3, s_4 soll durch die 1×4-reihige Matrix seiner vier *Komponenten*:

$$s = | s_1, s_2, s_3, s_4 | \tag{41}$$

repräsentiert werden und ist bei einer Lorentz-Transformation A durch $s\mathsf{A}$ zu ersetzen.

Ein Raum-Zeit-Vektor II. Art mit den *Komponenten* $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$ soll durch die alternierende Matrix

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix} \tag{42}$$

repräsentiert werden und ist (s. die in § 5 (23) und (24) festgesetzte Regel) bei einer Lorentz-Transformation A durch $\bar{\mathsf{A}} f \mathsf{A} = \mathsf{A}^{-1} f \mathsf{A}$ zu ersetzen. Dabei gilt in bezug auf den Ausdruck (37) die Identität $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}(\bar{\mathsf{A}} f \mathsf{A}) = \mathrm{Det}\,\mathsf{A}\;\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$. Es wird danach $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$ eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen (s. Gleichung (26) in § 5).

Für die duale Matrix f^* folgt dann mit Rücksicht auf (36):

$$(\mathsf{A}^{-1} f^* \mathsf{A})(\mathsf{A}^{-1} f \mathsf{A}) = \mathsf{A}^{-1} f^* f \mathsf{A} = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f \cdot \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f,$$

woraus zu ersehen ist, daß mit dem Raum-Zeit-Vektor II. Art f zusammen auch die zugehörige duale Matrix f^* sich wie ein Raum-Zeit-Vektor II. Art abändert, und es heiße deshalb f^* mit den Komponenten $f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{23}, f_{31}, f_{12}$ der *duale Raum-Zeit-Vektor* von f.

6⁰. Sind w und s zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art, so wird unter $w\bar{s}$ (wie auch unter $s\bar{w}$) die Verbindung

$$w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 + w_4 s_4 \tag{43}$$

aus den bezüglichen Komponenten zu verstehen sein. Bei einer Lorentz-Transformation A ist wegen $(w\mathsf{A})(\bar{\mathsf{A}}\bar{s}) = w\bar{s}$ diese Verbindung invariant. — Ist $w\bar{s} = 0$, so sollen w und s *normal* zueinander heißen.

Zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art w, s geben ferner zur Bildung der 2×4-reihigen Matrix

$$\begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}$$

Anlaß. Es zeigt sich dann sofort, daß das System der sechs Größen

$$\begin{gathered} w_2 s_3 - w_3 s_2, \quad w_3 s_1 - w_1 s_3, \quad w_1 s_2 - w_2 s_1, \quad w_1 s_4 - w_4 s_1, \\ w_2 s_4 - w_4 s_2, \quad w_3 s_4 - w_4 s_3 \end{gathered} \tag{44}$$

sich bei den Lorentz-Transformationen als Raum-Zeit-Vektor II. Art verhält. Der Vektor II. Art mit diesen Komponenten (44) werde mit $[w, s]$ bezeichnet. Man erschließt leicht $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}[w, s] = 0$. Der duale Vektor von $[w, s]$ soll $[w, s]^*$ geschrieben werden.

Ist w ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, f ein Raum-Zeit-Vektor II. Art, so bedeutet wf zunächst jedenfalls eine 1×4-reihige Matrix. Bei einer Lorentz-Transformation A geht w in $w' = w\mathsf{A}$, f in $f' = \mathsf{A}^{-1}f\mathsf{A}$ über; dabei wird $w'f' = w\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}f\mathsf{A} = (wf)\mathsf{A}$, d. h. wf transformiert sich wieder als ein Raum-Zeit-Vektor I. Art.

Man verifiziert, wenn w ein Vektor I., f ein Vektor II. Art ist, leicht die wichtige Identität

$$(45)\qquad [w, wf] + [w, wf^*]^* = (w\bar{w})f.$$

Die Summe der zwei Raum-Zeit-Vektoren II. Art links ist im Sinne der Summe zweier alternierenden Matrizen zu verstehen.

Nämlich für $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = i$ wird

$$wf = |\, if_{41}, if_{42}, if_{43}, 0 \,|; \qquad wf^* = |\, if_{32}, if_{13}, if_{21}, 0 \,|;$$

$$[w, wf] = 0, 0, 0, f_{41}, f_{42}, f_{43};\ [w, wf^*] = 0, 0, 0, f_{32}, f_{13}, f_{21},$$

und die Bemerkung, daß in diesem speziellen Falle die Relation (45) zutrifft, genügt bereits, um derselben allgemein sicher zu sein, da diese Relation kovarianten Charakter für die Lorentz-Gruppe hat und zudem in w_1, w_2, w_3, w_4 homogen ist.

Nach diesen Vorbereitungen beschäftigen wir uns zunächst mit den Gleichungen (C), (D), (E), durch welche die Konstanten ε, μ, σ eingeführt werden.

Statt des Raumvektors $\mathfrak{w}$, Geschwindigkeit der Materie, führen wir, wie schon in § 8, den Raum-Zeit-Vektor I. Art w mit den vier Komponenten

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_2 = \frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$$

ein; dabei gilt

$$(46)\qquad w\bar{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

und $-iw_4 > 0$.

Unter F und f wollen wir jetzt wieder die in den Grundgleichungen auftretenden Raum-Zeit-Vektoren II. Art $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ verstehen.

In $\Phi = -wF$ haben wir wieder einen Raum-Zeit-Vektor I. Art; seine Komponenten werden sein

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \phantom{w_1F_{21}} \quad w_2F_{12} + w_3F_{13} + w_4F_{14},\\
\Phi_2 &= w_1F_{21} \phantom{+ w_2F_{32}} + w_3F_{23} + w_4F_{24},\\
\Phi_3 &= w_1F_{31} + w_2F_{32} \phantom{+ w_3F_{43}} + w_4F_{34},\\
\Phi_4 &= w_1F_{41} + w_2F_{42} + w_3F_{43}.
\end{aligned}$$

Die drei ersten Größen Φ_1, Φ_2, Φ_3 sind bzw. die x-, y-, z-Komponente des Raumvektors

(47) $$\frac{\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

und ferner ist

(48) $$\Phi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{E})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}.$$

Da die Matrix F eine alternierende ist, gilt offenbar

(49) $$w\bar{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0,$$

der Vektor Φ ist also normal zu w; wir können diese Relation auch schreiben:

(50) $$\Phi_4 = i(\mathfrak{w}_x\Phi_1 + \mathfrak{w}_y\Phi_2 + \mathfrak{w}_z\Phi_3).$$

Den Raum-Zeit-Vektor I. Art Φ will ich *elektrische Ruh-Kraft* nennen.

Analoge Beziehungen wie zwischen $-wF, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}, \mathfrak{w}$ stellen sich zwischen $-wf, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{w}$ heraus und insbesondere wird auch $-wf$ normal zu w sein. Es kann nunmehr die Relation (C) durch

{C} $$wf = \varepsilon wF$$

ersetzt werden, eine Formel, die zwar vier Gleichungen für die bezüglichen Komponenten liefert, jedoch so, daß die vierte im Hinblick auf (50) eine Folge der drei ersten ist.

Wir bilden ferner den Raum-Zeit-Vektor I. Art $\Psi = iwf^*$, dessen Komponenten sind:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= -i(\phantom{w_1f_{34}+{}} w_2f_{34} + w_3f_{42} + w_4f_{23}),\\
\Psi_2 &= -i(w_1f_{43} \phantom{{}+w_2f_{34}} + w_3f_{14} + w_4f_{31}),\\
\Psi_3 &= -i(w_1f_{24} + w_2f_{41} \phantom{{}+w_3f_{14}} + w_4f_{12}),\\
\Psi_4 &= -i(w_1f_{32} + w_2f_{13} + w_3f_{21} \phantom{{}+w_4f_{12}}).
\end{aligned}$$

Davon sind die drei ersteren Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 bzw. die x-, y-, z-Komponente des Raumvektors

(51) $$\frac{\mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

und weiter ist

(52) $$\Psi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{m})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}};$$

zwischen ihnen besteht die Beziehung

(53) $$w\bar{\Psi} = w_1\Psi_1 + w_2\Psi_2 + w_3\Psi_3 + w_4\Psi_4 = 0,$$

die wir auch

(54) $$\Psi_4 = i(\mathfrak{w}_x\Psi_1 + \mathfrak{w}_y\Psi_2 + \mathfrak{w}_z\Psi_3)$$

schreiben können; der Vektor Ψ ist also wieder normal zu w. Den Raum-Zeit-Vektor I. Art Ψ will ich *magnetische Ruh-Kraft* nennen.

Analoge Beziehungen wie zwischen iwf^*, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}$ haben zwischen iwF^*, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{w}$ statt und es kann die Relation (D) nunmehr durch

$$\{D\} \qquad wF^* = \mu wf^*$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen $\{C\}$ und $\{D\}$ können wir benutzen, um die Feldvektoren F und f auf Φ und Ψ zurückzuführen. Wir haben

$$wF = -\Phi, \quad wF^* = -i\mu\Psi, \quad wf = -\varepsilon\Phi, \quad wf^* = -i\Psi$$

und die Anwendung der Regel (45) führt im Hinblick auf (46) zu

$$(55) \qquad F = [w, \Phi] + i\mu[w, \Psi]^*,$$

$$(56) \qquad f = \varepsilon[w, \Phi] + i\,[w, \Psi]^*,$$

d. i.

$$F_{12} = (w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\mu(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3), \text{ u. s. f.}$$

$$f_{12} = \varepsilon(w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\,(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3), \text{ u. s. f.}$$

Wir ziehen ferner den Raum-Zeit-Vektor II. Art $[\Phi, \Psi]$ mit den sechs Komponenten

$$\Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2, \quad \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3, \quad \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1,$$

$$\Phi_1\Psi_4 - \Phi_4\Psi_1, \quad \Phi_2\Psi_4 - \Phi_4\Psi_2, \quad \Phi_3\Psi_4 - \Phi_4\Psi_3$$

in Betracht. Alsdann verschwindet der zugehörige Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$w[\Phi, \Psi] = -(w\bar{\Psi})\Phi + (w\bar{\Phi})\Psi$$

wegen (49) und (53) identisch. Führen wir nun den Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$(57) \qquad \Omega = iw[\Phi, \Psi]^*$$

mit den Komponenten

$$\Omega_1 = -i \begin{vmatrix} w_2, & w_3, & w_4 \\ \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \\ \Psi_2, & \Psi_3, & \Psi_4 \end{vmatrix}, \text{ u. s. f.}$$

ein, so folgt durch Anwendung der Regel (45):

$$(58) \qquad [\Phi, \Psi] = i[w, \Omega]^*,$$

d. i.

$$\Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1 = i(w_3\Omega_4 - w_4\Omega_3), \text{ u. s. f.}$$

Der Vektor Ω erfüllt offenbar die Relation

$$(59) \qquad (w\bar{\Omega}) = w_1\Omega_1 + w_2\Omega_2 + w_3\Omega_3 + w_4\Omega_4 = 0,$$

die wir auch

$$\Omega_4 = i(\mathfrak{w}_x\Omega_1 + \mathfrak{w}_y\Omega_2 + \mathfrak{w}_z\Omega_3)$$

schreiben können, ist also wieder *normal zu w*. Falls $\mathfrak{w} = 0$ ist, hat man $\Phi_4 = 0$, $\Psi_4 = 0$, $\Omega_4 = 0$ und

(60) $\Omega_1 = \Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2, \quad \Omega_2 = \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3, \quad \Omega_3 = \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1.$

Den Raum-Zeit-Vektor I. Art Ω will ich als *Ruh-Strahl* bezeichnen.

Was die Relation (E) anbelangt, welche die Leitfähigkeit σ einführt, so erkennen wir zunächst, daß

$$-w\bar{s} = -(w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 + w_4 s_4) = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} + \varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \varrho'$$

die *Ruh-Dichte* der Elektrizität (s. § 8 und § 4 am Schlusse) wird. Alsdann stellt

(61) $$s + (w\bar{s})w$$

einen Raum-Zeit-Vektor I. Art vor, der wegen $w\bar{w} = -1$ offenbar wieder *normal zu w* ist und den ich als *Ruh-Strom* bezeichnen will. Fassen wir die drei ersten Komponenten dieses Vektors als x-, y-, z-Komponente eines Raum-Vektors auf, so ist für den letzteren die Komponente nach der Richtung von $\mathfrak{w}$:

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \frac{|\mathfrak{w}|\varrho'}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\varrho}{1-\mathfrak{w}^2} = \frac{\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}}{1-\mathfrak{w}^2}$$

und die Komponente nach einer jeden zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$ wieder

$$\mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{w}}};$$

es hängt dieser Raum-Vektor also sehr einfach mit dem Raum-Vektor $\mathfrak{J} = \mathfrak{s} - \varrho\mathfrak{w}$ zusammen, den wir in § 8 als Leitungsstrom bezeichneten.

Nunmehr kann durch Vergleich mit $\Phi = -wF$ die Relation (E) auf die Gestalt gebracht werden:

{E} $$s + (w\bar{s})w = -\sigma w F.$$

Diese Formel faßt wieder vier Gleichungen zusammen, von denen jedoch, weil es sich beiderseits um zu w normale Raum-Zeit-Vektoren I. Art handelt, die vierte eine Folge der drei ersten ist.

Endlich werden wir noch die Differentialgleichungen (A) und (B) in eine typische Form umsetzen.

§ 12.

Der Differentialoperator lor.

Eine 4×4-reihige Matrix

(62) $$S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = |S_{hk}|$$

mit der Vorschrift, sie bei einer Lorentz-Transformation A jedesmal durch $\bar{\mathsf{A}}S\mathsf{A}$ zu ersetzen, mag eine *Raum-Zeit-Matrix* II. Art heißen. Eine derartige Matrix hat man insbesondere

in der alternierenden Matrix f, die einem Raum-Zeit-Vektor II. Art f entspricht,

in dem Produkte fF zweier solcher alternierender Matrizen f, F, das bei einer Transformation A durch $(\mathsf{A}^{-1}f\mathsf{A})(\mathsf{A}^{-1}F\mathsf{A}) = \mathsf{A}^{-1}fF\mathsf{A}$ zu ersetzen ist,

ferner, wenn w_1, w_2, w_3, w_4 und $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art sind, in der Matrix der 4×4 Elemente $S_{hk} = w_h \Omega_k$,

endlich in einem Vielfachen L der Einheitsmatrix, d. h. einer 4×4-reihigen Matrix, in der alle Elemente in der Hauptdiagonale einen gleichen Wert L haben und die übrigen Elemente sämtlich Null sind.

Wir haben es hier stets mit Funktionen von Raum-Zeitpunkten x, y, z, it zu tun und können mit Vorteil eine 1×4-*reihige Matrix, gebildet aus den Differentiationssymbolen*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{i \partial t} \right|,$$

oder auch

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right| \tag{63}$$

geschrieben, verwenden. Für diese Matrix will ich die *Abkürzung* lor brauchen.

Es soll dann, wenn S wie in (62) eine Raum-Zeit-Matrix II. Art bedeutet, in sinngemäßer Übertragung der Regel für die Produktbildung von Matrizen, unter lor S die 1×4-reihige Matrix

$$|K_1, K_2, K_3, K_4|$$

der Ausdrücke

$$K_k = \frac{\partial S_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3k}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_4} \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{64}$$

verstanden werden.

Wird durch eine Lorentz-Transformation A ein neues Bezugsystem x_1', x_2', x_3', x_4' für die Raum-Zeitpunkte eingeführt, so mag analog der Operator

$$\text{lor}' = \left| \frac{\partial}{\partial x_1'}, \frac{\partial}{\partial x_2'}, \frac{\partial}{\partial x_3'}, \frac{\partial}{\partial x_4'} \right|$$

angewandt werden. Geht dabei S in $S' = \bar{\mathsf{A}}S\mathsf{A} = |S'_{hk}|$ über, so wird dann unter lor$'$ S' die 1×4-reihige Matrix der Ausdrücke

$$K_k' = \frac{\partial S'_{1k}}{\partial x_1'} + \frac{\partial S'_{2k}}{\partial x_2'} + \frac{\partial S'_{3k}}{\partial x_3'} + \frac{\partial S'_{4k}}{\partial x_4'} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

zu verstehen sein. Nun gilt für die Differentiation einer beliebigen Funktion von einem Raum-Zeitpunkte die Regel

$$\frac{\partial}{\partial x_k'} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_k'}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_2}\alpha_{2k} + \frac{\partial}{\partial x_3}\alpha_{3k} + \frac{\partial}{\partial x_4}\alpha_{4k},$$

die in einer leicht verständlichen Weise symbolisch als

$$\text{lor}' = \text{lor}\,\mathsf{A}$$

zu deuten ist, und mit Rücksicht hierauf folgt sogleich

$$(65)\qquad \text{lor}'\,S' = \text{lor}\,(\mathsf{A}(\mathsf{A}^{-1}S\mathsf{A})) = (\text{lor}\,S)\mathsf{A},$$

d. h. *wenn S eine Raum-Zeit-Matrix II. Art vorstellt, so transformiert sich* lor S *als ein Raum-Zeit-Vektor I. Art.*

Ist insbesondere L ein Vielfaches der Einheitsmatrix, so wird unter lor L *die Matrix der Elemente*

$$(66)\qquad \left| \frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial x_3}, \frac{\partial L}{\partial x_4} \right|$$

zu verstehen sein.

Stellt $s = | s_1, s_2, s_3, s_4 |$ einen Raum-Zeit-Vektor I. Art vor, so wird

$$(67)\qquad \text{lor}\,\bar{s} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4}$$

zu erklären sein. Treten bei Anwendung einer Lorentz-Transformation A die Zeichen lor′, s' an Stelle von lor, s, so folgt

$$\text{lor}'\,\bar{s}' = (\text{lor}\,\mathsf{A})\,(\bar{\mathsf{A}}\bar{s}) = \text{lor}\,\bar{s},$$

d. h. lor $\bar{s}$ *ist eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen.*

In allen diesen Beziehungen spielt der Operator lor *selbst die Rolle eines Raum-Zeit-Vektors I. Art.*

Stellt f einen Raum-Zeit-Vektor II. Art vor, so hat nun $-\text{lor}\,f$ den Raum-Zeit-Vektor I. Art mit den Komponenten

$$\begin{array}{llll} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} & + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} & + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & & + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} & + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} & + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} & & + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} & + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} & + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} & \end{array}$$

zu bedeuten. Hiernach läßt sich das System der Differentialgleichungen (A) in der kurzen Form

$$\{\text{A}\}\qquad \text{lor}\,f = -s$$

zusammenziehen. Ganz entsprechend wird das System der Differentialgleichungen (B) zu schreiben sein:

$$\{B\} \qquad \text{lor}\, F^* = 0.$$

Die im Hinblick auf die Definition (67) von $\text{lor}\, \bar{s}$ gebildeten Verbindungen $\text{lor}\, (\overline{\text{lor}\, f})$ und $\text{lor}\, (\overline{\text{lor}\, F^*})$ verschwinden offenbar identisch, indem f und F^* alternierende Matrizen sind. Darnach folgt aus $\{A\}$ für den Strom s die Beziehung

$$(68) \qquad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = 0,$$

während die Relation

$$(69) \qquad \text{lor}\, (\overline{\text{lor}\, F^*}) = 0$$

den Sinn hat, daß *die vier in* $\{B\}$ *angewiesenen Gleichungen nur drei unabhängige Bedingungen* für den Verlauf der Feldvektoren repräsentieren.

Ich fasse nunmehr die Resultate zusammen:

Es bedeute w den Raum-Zeit-Vektor I. Art $\frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$ ($\mathfrak{w}$ Geschwindigkeit der Materie), *F den Raum-Zeit-Vektor II. Art* $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{M}$ magnetische Erregung, $\mathfrak{E}$ elektrische Kraft), *f den Raum-Zeit-Vektor II. Art* $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{m}$ magnetische Kraft, $\mathfrak{e}$ elektrische Erregung), *s den Raum-Zeit-Vektor I. Art* $\mathfrak{s}, i\varrho$ (ϱ elektrische Raumdichte, $\mathfrak{s} - \varrho\mathfrak{w}$ Leitungsstrom), *ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit, so lauten* (mit den in § 10 und § 11 erklärten Symbolen der Matrizenrechnung) *die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*

$$\begin{array}{ll} \{A\} & \text{lor}\, f = -s, \\ \{B\} & \text{lor}\, F^* = 0, \\ \{C\} & wf = \varepsilon w F, \\ \{D\} & wF^* = \mu w f^*, \\ \{E\} & s + (w\bar{s})w = -\sigma w F. \end{array}$$

Dabei gilt $w\bar{w} = -1$, es sind die Raum-Zeit-Vektoren I. Art wF, wf, wF^*, wf^*, $s + (w\bar{s})w$ sämtlich normal zu w und endlich besteht für das Gleichungssystem $\{B\}$ der Zusammenhang

$$\text{lor}\, (\overline{\text{lor}\, F^*}) = 0.$$

In Anbetracht der zuletzt genannten Umstände steht hier genau die erforderliche Anzahl von unabhängigen Gleichungen zur Verfügung, um bei den geeigneten Grenzdaten die Vorgänge vollständig zu beschreiben, *wofern die Bewegung der Materie, also der Vektor* $\mathfrak{w}$ *als Funktion von x, y, z, t bekannt ist.*

§ 13.

Das Produkt der Feldvektoren fF.

Endlich fragen wir nach den Gesetzen, die zur Bestimmung des Vektors w als Funktion von x, y, z, t führen. Bei den hierauf bezüglichen Untersuchungen treten diejenigen Ausdrücke in den Vordergrund, die durch *Bildung des Produkts der zwei alternierenden Matrizen*

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} 0, & F_{12}, & F_{13}, & F_{14} \\ F_{21}, & 0, & F_{23}, & F_{24} \\ F_{31}, & F_{32}, & 0, & F_{34} \\ F_{41}, & F_{42}, & F_{43}, & 0 \end{vmatrix}$$

sich darbieten. Ich schreibe

$$(70) \qquad fF = \begin{vmatrix} S_{11}-L, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}-L, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}-L, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44}-L \end{vmatrix}$$

so, daß dabei

$$(71) \qquad S_{11} + S_{22} + S_{33} + S_{44} = 0$$

wird.

Alsdann bedeutet L die in den Indizes 1, 2, 3, 4 symmetrische Verbindung

$$(72) \qquad L = \frac{1}{2}(f_{23}F_{23} + f_{31}F_{31} + f_{12}F_{12} + f_{14}F_{14} + f_{24}F_{24} + f_{34}F_{34}),$$

und es wird

$$(73) \qquad \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2}(f_{23}F_{23} + f_{34}F_{34} + f_{42}F_{42} - f_{12}F_{12} - f_{13}F_{13} - f_{14}F_{14}), \\ S_{12} &= f_{13}F_{32} + f_{14}F_{42}, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Indem ich die *Realitätsverhältnisse* zum Ausdruck bringe, will ich noch

$$(74) \qquad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix}$$

schreiben, wobei dann

$$
(75)\quad
\begin{aligned}
X_x &= \frac{1}{2}(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x - \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y - \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z),\\
X_y &= \mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_y + \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_x, \quad Y_x = \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_x + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_y, \text{ u. s. f.}\\
X_t &= \mathfrak{e}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_z\mathfrak{M}_y,\\
T_x &= \mathfrak{m}_z\mathfrak{E}_y - \mathfrak{m}_y\mathfrak{E}_z, \text{ u. s. f.}\\
T_t &= \frac{1}{2}(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z)
\end{aligned}
$$

und auch

$$
(76)\quad L = \frac{1}{2}(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z)
$$

sämtlich reell sind. In den Theorien für ruhende Körper kommen die Verbindungen X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z unter dem Namen „Maxwellsche Spannungen“, die Größen T_x, T_y, T_z als „Poyntingscher Vektor“, T_t als „elektromagnetische Energiedichte für die Volumeneinheit“ vor und wird L als „Lagrangesche Funktion“ bezeichnet.

Wir finden nun andererseits durch Zusammensetzung der zu f und F dualen Matrizen in umgekehrter Folge sofort

$$
(77)\quad F^*f^* = \begin{vmatrix}
-S_{11}-L, & -S_{12}, & -S_{13}, & -S_{14}\\
-S_{21}, & -S_{22}-L, & -S_{23}, & -S_{24}\\
-S_{31}, & -S_{32}, & -S_{33}-L, & -S_{34}\\
-S_{41}, & -S_{42}, & -S_{43}, & -S_{44}-L
\end{vmatrix}
$$

und können hiernach setzen

$$
(78)\quad fF = S - L, \qquad F^*f^* = -S - L,
$$

indem wir unter L das Vielfache $L\cdot 1$ der Einheitsmatrix, d. h. die Matrix der Elemente

$$
|Le_{hk}| \qquad \begin{pmatrix} e_{hh}=1, \; e_{hk}=0, \; h \gtrless k\\ h,k=1,2,3,4 \end{pmatrix}
$$

verstehen.

Daraus folgern wir weiter, indem hier $SL = LS$ ist,

$$
F^*f^*fF = (-S-L)(S-L) = -SS + L^2,
$$

und finden, da $f^*f = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$, $F^*F = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} F$ ist, die interessante Beziehung:

$$
(79)\quad SS = L^2 - \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f \,\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} F,
$$

d. h. *das Produkt der Matrix S in sich selbst ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix,* eine Matrix, in welcher außerhalb der Hauptdiagonale alle Elemente Null und in der Diagonale alle Elemente gleich sind und als gemeinsamen Wert die hier rechts angegebene Größe haben. *Es gelten also allgemein die Relationen*

(80) $$S_{h1}S_{1k}+S_{h2}S_{2k}+S_{h3}S_{3k}+S_{h4}S_{4k}=0$$

bei ungleichen Indizes h, k aus der Reihe 1, 2, 3, 4 *und*

(81) $$S_{h1}S_{1h}+S_{h2}S_{2h}+S_{h3}S_{3h}+S_{h4}S_{4h}=L_2-\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}f\,\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}F$$

für $h=1,2,3,4$.

Indem wir jetzt anstatt F und f in den Verbindungen (72), (73) mittels (55), (56), (57) *die elektrische Ruh-Kraft* Φ, *die magnetische Ruh-Kraft* Ψ, *den Ruh-Strahl* Ω einführen, gelangen wir zu den Ausdrücken:

(82) $$L=-\frac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi}+\frac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi},$$

(83) $$\begin{aligned}S_{hk}=&-\frac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi}e_{hk}-\frac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}e_{hk}\\&+\varepsilon(\Phi_h\Phi_k-\Phi\overline{\Phi}w_hw_k)+\mu(\Psi_h\Psi_k-\Psi\overline{\Psi}w_hw_k)\\&-\Omega_hw_k-\varepsilon\mu w_h\Omega_k\qquad(h,k=1,2,3,4);\end{aligned}$$

darin sind noch einzusetzen

$$\Phi\overline{\Phi}=\Phi_1^2+\Phi_2^2+\Phi_3^2+\Phi_4^2,\qquad\Psi\overline{\Psi}=\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_3^2+\Psi_4^2,$$
$$e_{hh}=1,\qquad e_{hk}=0\,(h\gtrless k).$$

Nämlich jedenfalls ist die rechte Seite von (82) ebenso wie L eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen und stellen die 4×4 Elemente rechts in (83) ebenso wie die S_{hk} eine Raum-Zeit-Matrix II. Art dar. Mit Rücksicht hierauf genügt es schon, um die Relationen (82), (83) allgemein behaupten zu können, sie nur für den Fall $w_1=0$, $w_2=0$, $w_3=0$, $w_4=i$ zu verifizieren. Für diesen Fall $\mathfrak{w}=0$ aber kommen (83) und (82) durch (47), (51), (60) einerseits, $\mathfrak{e}=\varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}=\mu\mathfrak{m}$ andererseits unmittelbar auf die Gleichungen (75), (76) hinaus.

Der Ausdruck rechts in (81), der

$$=\left(\frac{1}{2}(\mathfrak{m}\mathfrak{M}-\mathfrak{e}\mathfrak{E})\right)^2+(\mathfrak{e}\mathfrak{m})(\mathfrak{E}\mathfrak{M})$$

ist, erweist sich durch $(\mathfrak{e}\mathfrak{m})=\varepsilon\Phi\overline{\Psi}$, $(\mathfrak{E}\mathfrak{M})=\mu\Phi\overline{\Psi}$ als $\geqq0$; die Quadratwurzel aus ihm, $\geqq0$ genommen, mag im Hinblick auf (79) mit $\mathrm{Det}^{\frac{1}{4}}S$ bezeichnet werden.

Für $\overline{S}$, *die transponierte Matrix von* S, folgt aus (78), da $\bar{f}=-f$, $\overline{F}=-F$ ist,

(84) $$Ff=\overline{S}-L,\qquad f^*F^*=-\overline{S}-L.$$

Sodann ist

$$S-\overline{S}=|S_{hk}-S_{kh}|$$

eine alternierende Matrix und bedeutet zugleich einen Raum-Zeit-Vektor II. Art. Aus den Ausdrücken (83) entnehmen wir sofort

$$S - \bar{S} = -(\varepsilon\mu - 1)[w, \Omega], \tag{85}$$

woraus noch (vgl. (57), (58))

$$w(S - \bar{S})^* = 0, \tag{86}$$

$$w(S - \bar{S}) = (\varepsilon\mu - 1)\Omega \tag{87}$$

herzuleiten ist.

Wenn in einem Raum-Zeitpunkte die Materie ruht, $\mathfrak{w} = 0$ *ist, so bedeutet* (86) *das Bestehen der Gleichungen*

$$Z_y = Y_z, \qquad X_z = Z_x, \qquad Y_x = X_y;$$

ferner hat man dann nach (83):

$$T_x = \Omega_1, \qquad T_y = \Omega_2, \qquad T_z = \Omega_3,$$
$$X_t = \varepsilon\mu\Omega_1, \qquad Y_t = \varepsilon\mu\Omega_2, \qquad Z_t = \varepsilon\mu\Omega_3.$$

Nun wird man durch eine geeignete Drehung des räumlichen Koordinatensystems der x, y, z um den Nullpunkt es bewirken können, daß

$$Z_y = Y_z = 0, \qquad X_z = Z_x = 0, \qquad Y_x = X_y = 0$$

ausfallen. Nach (71) hat man

$$X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0 \tag{88}$$

und nach dem Ausdruck in (83) ist hier jedenfalls $T_t > 0$. Im speziellen Falle, daß auch Ω verschwindet, folgt dann aus (81)

$$X_x^2 = Y_y^2 = Z_z^2 = T_t^2 = (\mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S)^2$$

und sind T_t und von den drei Größen X_x, Y_y, Z_z eine $= +\mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S$, die zwei anderen $= -\mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S$. Verschwindet Ω nicht, so sei etwa $\Omega_3 \neq 0$, dann hat man nach (80) insbesondere

$$T_z X_t = 0, \qquad T_z Y_t = 0, \qquad Z_z T_z + T_z T_t = 0$$

und findet demnach $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $Z_z = -T_t$. Aus (81) und im Hinblick auf (88) folgt alsdann

$$X_x = -Y_y = \pm \mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S,$$

$$-Z_z = T_t = \sqrt{\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} S + \varepsilon\mu\Omega_3^2} > \mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S.$$

Von ganz besonderer Bedeutung wird endlich *der Raum-Zeit-Vektor I. Art*

$$K = \mathrm{lor}\, S, \tag{89}$$

für den wir jetzt eine wichtige Umformung nachweisen wollen.

Nach (78) ist $S = L + fF$ und es folgt zunächst

$$\text{lor}\, S = \text{lor}\, L + \text{lor}\, fF.$$

Das Symbol lor bedeutet einen Differentiationsprozeß, der in $\text{lor}\, fF$ einerseits die Komponenten von f, andererseits die Komponenten von F betreffen wird. Entsprechend zerlegt sich $\text{lor}\, fF$ additiv in einen ersten und einen zweiten Teil. Der erste Teil wird offenbar das Produkt der Matrizen $(\text{lor}\, f)F$ sein, darin $\text{lor}\, f$ als 1×4-reihige Matrix für sich aufgefaßt. Der zweite Teil ist derjenige Teil von $\text{lor}\, fF$, in dem die Differentiationen nur die Komponenten von F betreffen. Nun entnehmen wir aus (78)

$$fF = -F^* f^* - 2L;$$

infolgedessen wird dieser zweite Teil von $\text{lor}\, fF$ sein $-(\text{lor}\, F^*)f^* +$ dem Teil von $-2\, \text{lor}\, L$, in dem die Differentiationen nur die Komponenten von F betreffen. Danach entsteht

$$\text{lor}\, S = (\text{lor}\, f)F - (\text{lor}\, F^*)f^* + N, \tag{90}$$

wo N den Vektor mit den Komponenten

$$N_h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_h} F_{23} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_h} F_{31} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_h} F_{12} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_h} F_{14} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h} F_{24} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h} F_{34}\right.$$
$$\left. - f_{23} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} - f_{31} \frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} - f_{12} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} - f_{14} \frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} - f_{24} \frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} - \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h}\right)$$
$$(h = 1, 2, 3, 4)$$

bedeutet. Durch Benutzung der Grundgleichungen $\{A\}$ und $\{B\}$ geht (90) in die *fundamentale Relation*

$$\text{lor}\, S = -sF + N \tag{91}$$

über.

Im Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, wo $f = F$ ist, verschwindet N identisch.

Allgemein gelangen wir auf Grund von (55), (56) und im Hinblick auf den Ausdruck (82) von L und auf (57) zu folgenden Ausdrücken der Komponenten von N:

$$N_h = -\frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_h} - \frac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial \mu}{\partial x_h} \tag{92}$$
$$+ (\varepsilon\mu - 1)\left(\Omega_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_h} + \Omega_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_h} + \Omega_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_h} + \Omega_4 \frac{\partial w_4}{\partial x_h}\right)$$
$$\text{für } h = 1, 2, 3, 4.$$

Machen wir noch von (59) Gebrauch und bezeichnen den Raum-Vektor, der Ω_1, Ω_2, Ω_3 als x-, y-, z-Komponenten hat, mit $\mathfrak{W}$, so kann der letzte, dritte Bestandteil von (92) auch auf die Gestalt

$$\frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x_h}\right) \tag{93}$$

gebracht werden, wobei die Klammer das skalare Produkt der darin aufgeführten zwei Vektoren anzeigt.

§ 14.

Die ponderomotorischen Kräfte.

Wir stellen jetzt die Relation $K = \mathrm{lor}\, S = -sF + N$ ausführlicher dar; sie liefert die vier Gleichungen

$$K_1 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial t} = \varrho\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_y$$
$$-\frac{1}{2}\Phi\bar{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{2}\Psi\bar{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x}\right), \tag{94}$$

$$K_2 = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial t} = \varrho\mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_x + \mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_z$$
$$-\frac{1}{2}\Phi\bar{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \frac{1}{2}\Psi\bar{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial y}\right), \tag{95}$$

$$K_3 = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial t} = \varrho\mathfrak{E}_z + \mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_y - \mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_x$$
$$-\frac{1}{2}\Phi\bar{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2}\Psi\bar{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial z}\right), \tag{96}$$

$$\frac{1}{i}K_4 = -\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{\partial T_t}{\partial t} = \mathfrak{s}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z\mathfrak{E}_z$$
$$+\frac{1}{2}\Phi\bar{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\Psi\bar{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t}\right). \tag{97}$$

Es ist nun meine Meinung, daß bei den elektromagnetischen Vorgängen die ponderomotorische Kraft, die an der Materie in einem Raum-Zeitpunkte x, y, z, t angreift, berechnet für die Volumeneinheit, als x-, y-, z-Komponenten die drei ersten Komponenten des zum Raum-Zeit-Vektor w normalen Raum-Zeit-Vektors

$$K + (w\bar{K})w \tag{98}$$

hat und daß ferner der Energiesatz seinen Ausdruck in der obigen vierten Relation findet.

Diese Meinung eingehend zu begründen, sei einem folgenden Aufsatze vorbehalten; hier will ich nur noch durch einige Ausführungen zur Mechanik dieser Meinung eine gewisse Stütze geben.

Im Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ ist der Vektor $N = 0$, $\mathfrak{s} = \varrho\mathfrak{w}$, es wird dadurch $w\bar{K} = 0$ und es decken sich diese Ansätze mit den in der Elektronentheorie üblichen.

Anhang.

Mechanik und Relativitätspostulat.

Es wäre höchst unbefriedigend, dürfte man die neue Auffassung des Zeitbegriffs, die durch die Freiheit der Lorentz-Transformationen gekennzeichnet ist, nur für ein Teilgebiet der Physik gelten lassen.

Nun sagen viele Autoren, die klassische Mechanik stehe im Gegensatz zu dem Relativitätspostulate, das hier für die Elektrodynamik zugrunde gelegt ist.

Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, fassen wir eine spezielle Lorentz-Transformation ins Auge, wie sie durch die Gleichungen (10), (11), (12) dargestellt ist, mit einem von Null verschiedenen Vektor $\mathfrak{v}$ von irgendeiner Richtung und einem Betrage q, der < 1 ist. Wir wollen aber für einen Moment noch keine Verfügung über das Verhältnis von Längeneinheit und Zeiteinheit getroffen denken und demgemäß in jenen Gleichungen statt t, t', q schreiben $ct, ct', \frac{q}{c}$, wobei dann c eine gewisse positive Konstante vorstellt und $q < c$ sein muß. Die genannten Gleichungen verwandeln sich dadurch in

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \quad \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{c(\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt)}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + c^2 t}{c\sqrt{c^2 - q^2}};$$

es bedeutet, wie wir erinnern, $\mathfrak{r}$ den Raumvektor x, y, z und $\mathfrak{r}'$ den Raumvektor $x', y'\ z'$.

Gehen wir in diesen Gleichungen, während wir $\mathfrak{v}$ festhalten, zur Grenze $c = \infty$ über, so entsteht aus ihnen

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \quad \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt, \quad t' = t.$$

Diese neuen Gleichungen würden nun bedeuten einen Übergang vom räumlichen Koordinatensysteme x, y, z zu einem anderen räumlichen Koordinatensysteme x', y', z' mit parallelen Achsen, dessen Nullpunkt in bezug auf das erste in gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet, während der Zeitparameter ganz unberührt bleiben soll.

Auf Grund dieser Bemerkung darf man sagen:

Die klassische Mechanik postuliert eine Kovarianz der physikalischen Gesetze für die Gruppe der homogenen linearen Transformationen des Ausdrucks

$$(1) \qquad -x^2 - y^2 - z^2 + c^2t^2$$

in sich mit der Bestimmung $c = \infty$.

Nun wäre es geradezu verwirrend, in einem Teilgebiet der Physik eine Kovarianz der Gesetze für die Transformationen des Ausdrucks (1)

in sich bei einem bestimmten endlichen c, in einem anderen Teilgebiete aber für $c = \infty$ zu finden. Daß die Newtonsche Mechanik nur diese Kovarianz für $c = \infty$ behaupten und sie nicht für den Fall von c als Lichtgeschwindigkeit ersinnen konnte, bedarf keiner Erklärung. Sollte aber nicht gegenwärtig der Versuch zulässig sein, jene traditionelle Kovarianz für $c = \infty$ nur als eine durch die Erfahrungen zunächst gewonnene Approximation an eine exaktere Kovarianz der Naturgesetze für ein gewisses endliches c aufzufassen?

Ich möchte ausführen, daß durch eine *Reformierung der Mechanik, wobei an Stelle des Newtonschen Relativitätspostulates mit $c = \infty$ ein solches für ein endliches c tritt*, sogar der axiomatische Aufbau der Mechanik erheblich an Vollendung zu gewinnen scheint.

Das Verhältnis der Zeiteinheit zur Längeneinheit sei derart normiert, daß das Relativitätspostulat mit $c = 1$ in Betracht kommt.

Indem ich jetzt geometrische Bilder auf die Mannigfaltigkeit der vier Variabelen x, y, z, t übertragen will, mag es zum leichteren Verständnis des Folgenden bequem sein, zunächst y, z völlig außer Betracht zu lassen und x und t als irgendwelche schiefwinklige Parallelkoordinaten in einer Ebene zu deuten.

Ein Raum-Zeit-Nullpunkt O $(x, y, z, t = 0, 0, 0, 0)$ wird bei den Lorentz-Transformationen festgehalten. Das Gebilde

$$(2) \qquad -x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1, \qquad t > 0,$$

eine *hyperboloidische Schale*, umfaßt den Raum-Zeitpunkt $A(x,y,z,t = 0,0,0,1)$ und alle Raum-Zeitpunkte A', die nach Lorentz-Transformationen als $(x', y', z', t' = 0, 0, 0, 1)$ in den neu eingeführten Bestimmungsstücken x', y', z', t' auftreten.

Die Richtung eines Radiusvektors OA' von O nach einem Punkte A' von (2) und die Richtungen der in A' an (2) gehenden Tangenten sollen *normal* zueinander heißen.

Verfolgen wir eine bestimmte Stelle der Materie in ihrer Bahn zu allen Zeiten t. Die Gesamtheit der Raum-Zeitpunkte x, y, z, t, die der Stelle zu den verschiedenen Zeiten t entsprechen, nenne ich eine *Raum-Zeitlinie.*

Die Aufgabe, die Bewegung der Materie zu bestimmen, ist dahin aufzufassen: *Es soll für jeden Raum-Zeitpunkt die Richtung der daselbst durchlaufenden Raum-Zeitlinie festgestellt werden.*

Einen Raum-Zeitpunkt $P(x, y, z, t)$ *auf Ruhe transformieren*, heißt, durch eine Lorentz-Transformation ein Bezugsystem x', y', z', t' einführen derart, daß die t'-Achse OA' die Richtung erlangt, die in P die dort durchlaufende Raum-Zeitlinie zeigt. Der Raum $t' =$ konst., der durch P

zu legen ist, soll dann der in P auf der Raum-Zeitlinie *normale* Raum heißen. Dem Zuwachs dt der Zeit t von P aus entspricht der Zuwachs

$$(3) \qquad d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2} = \frac{dx_4}{w_4}\,^{*)}$$

des hierbei einzuführenden Parameters t'. Der Wert des Integrals

$$\int d\tau = \int \sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)},$$

auf der Raum-Zeitlinie von irgendeinem festen Anfangspunkte P^0 an bis zum variabel gedachten Endpunkte P gerechnet, heiße die *Eigenzeit* der betreffenden Stelle der Materie im Raum-Zeitpunkte P. (Es ist das eine Verallgemeinerung des von Lorentz für gleichförmige Bewegungen gebildeten Begriffs der *Ortszeit.*)

Nehmen wir einen räumlich ausgedehnten Körper R^0 zu einer bestimmten Zeit t^0, so soll der Bereich aller durch die Raum-Zeitpunkte R^0, t^0 führenden Raum-Zeitlinien ein *Raum-Zeitfaden* heißen.

Haben wir einen analytischen Ausdruck $\Theta(x,y,z,t)$, so daß $\Theta(x,y,z,t) = 0$ von jeder Raum-Zeitlinie des Fadens in einem Punkte getroffen wird, wobei

$$-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right)^2 > 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial t} > 0$$

ist, so wollen wir die Gesamtheit Q der betreffenden Treffpunkte einen *Querschnitt* des Fadens nennen. An jedem Punkte $P(x, y, z, t)$ eines solchen Querschnitts können wir durch eine Lorentz-Transformation ein Bezugsystem x', y', z', t' einführen, so daß hernach

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z'} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial t'} > 0$$

wird. Die Richtung der betreffenden, eindeutig bestimmten t'-Achse heiße die *obere Normale* des Querschnitts Q im Punkte P und der Wert $dJ = \iiint dx'\,dy'\,dz'$ für eine Umgebung von P auf dem Querschnitt ein *Inhaltselement* des Querschnitts. In diesem Sinne ist R^0, t^0 selbst als der zur t-Achse normale Querschnitt $t = t^0$ des Fadens und das Volumen des Körpers R^0 als der *Inhalt* dieses Querschnitts zu bezeichnen.

Indem wir den Raum R^0 nach einem Punkte hin konvergieren lassen, kommen wir zum Begriffe eines *unendlich dünnen* Raum-Zeitfadens. In einem solchen denken wir uns stets *eine* Raum-Zeitlinie irgendwie als *Hauptlinie* ausgezeichnet und verstehen unter der *Eigenzeit des Fadens* die auf dieser Hauptlinie festgestellte Eigenzeit, unter den *Normalquerschnitten* des Fadens seine Durchquerungen durch die in den Punkten der Hauptlinie auf dieser normalen Räume.

---

*) Die Bezeichnung mit Indizes und die Zeichen $\mathfrak{w}$, w nehmen wir wieder in dem früher festgesetzten Sinne in Gebrauch (s. § 3 und § 4).

Wir formulieren nunmehr das *Prinzip von der Erhaltung der Massen.*

Jedem Raume R zu einer Zeit t gehört eine positive Größe, die *Masse in* R *zur Zeit* t, zu. Konvergiert R nach einem Punkte x, y, z, t hin, so nähere sich der Quotient aus dieser Masse und dem Volumen von R einem Grenzwert $\mu(x, y, z, t)$, der *Massendichte* im Raum-Zeitpunkte x, y, z, t.

Das Prinzip von der Erhaltung der Massen besagt: *Für einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden ist das Produkt* μdJ *aus der Massendichte* μ *an einer Stelle* x, y, z, t *des Fadens* (d. h. der Hauptlinie des Fadens) *und dem Inhalt* dJ *des durch die Stelle gehenden zur* t*-Achse normalen Querschnitts stets längs des ganzen Fadens konstant.*

Nun wird als Inhalt dJ_n des durch x, y, z, t gelegten Normalquerschnitts des Fadens

$$(4) \qquad dJ_n = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\, dJ = -iw_4\, dJ = \frac{dt}{d\tau}\, dJ$$

zu rechnen sein und es möge

$$(5) \qquad \nu = \frac{\mu}{-iw_4} = \mu\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} = \mu \frac{d\tau}{dt}$$

als *Ruh-Massendichte* an der Stelle x, y, z, t definiert werden. Alsdann kann das Prinzip von der Erhaltung der Massen auch so formuliert werden:

Für einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden ist das Produkt aus der Ruh-Massendichte und dem Inhalt des Normalquerschnitts an einer Stelle des Fadens stets längs des ganzen Fadens konstant.

In einem beliebigen Raum-Zeitfaden sei ein erster Querschnitt Q^0 und sodann ein zweiter Querschnitt Q^1 angebracht, der mit Q^0 dessen Punkte auf der Begrenzung des Fadens, aber nur diese gemein hat, und die Raum-Zeitlinien innerhalb des Fadens mögen auf Q^1 größere Werte t als auf Q^0 zeigen. Das von Q^0 und Q^1 zusammen begrenzte, im Endlichen gelegene Gebiet soll dann eine *Raum-Zeit-Sichel,* Q^0 die *untere,* Q^1 die *obere* Begrenzung der Sichel heißen.

Denken wir uns den Faden in viele sehr dünne Raum-Zeitfäden zerlegt, so entspricht jedem Eintritt eines dünnen Fadens in die untere Begrenzung der Sichel ein Austritt aus der oberen, wobei für beide das im Sinne von (4) und (5) ermittelte Produkt νdJ_n jedesmal gleichen Wert hat. Es verschwindet daher die Differenz der zwei Integrale $\int \nu dJ_n$, das erste erstreckt über die obere, das zweite über die untere Begrenzung der Sichel. Diese Differenz findet sich nach einem bekannten Theoreme der Integralrechnung gleich dem Integrale

$$\iiiint \mathrm{lor}\, \nu \overline{w}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

erstreckt über das ganze Gebiet der Sichel, wobei (vgl. (67) in § 12)

$$\operatorname{lor} \nu \bar{w} = \frac{\partial \nu w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_4}{\partial x_4}$$

ist. Wird die Sichel auf einen Raum-Zeitpunkt x, y, z, t zusammengezogen, so folgt hiernach die Differentialgleichung

$$\operatorname{lor} \nu \bar{w} = 0, \tag{6}$$

d. i. die *Kontinuitätsbedingung*

$$\frac{\partial \mu \mathfrak{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Wir bilden ferner, über das ganze Gebiet einer Raum-Zeit-Sichel erstreckt, das Integral

$$\mathsf{N} = \iiiint \nu \, dx \, dy \, dz \, dt. \tag{7}$$

Wir zerschneiden die Sichel in dünne Raum-Zeitfäden und jeden dieser Fäden weiter nach kleinen Elementen $d\tau$ seiner Eigenzeit, die aber noch gegen die Lineardimensionen der Normalquerschnitte groß sind, setzen die Masse eines solchen Fadens $\nu dJ_n = dm$ und schreiben noch τ^0 und τ^1 für die Eigenzeit des Fadens auf der unteren bzw. der oberen Begrenzung der Sichel; alsdann ist das Integral (7) auch zu deuten als

$$\iint \nu dJ_n d\tau = \int (\tau^1 - \tau^0) \, dm$$

über die sämtlichen Fäden in der Sichel.

Nun fasse ich die Raum-Zeitlinien innerhalb einer Raum-Zeit-Sichel gleichsam wie substanzielle Kurven aus substanziellen Punkten bestehend auf und denke sie mir einer kontinuierlichen Lagenveränderung innerhalb der Sichel in folgender Art unterworfen. Die ganzen Kurven sollen irgendwie *unter Festhaltung der Endpunkte auf der unteren und der oberen Begrenzung* der Sichel verrückt und die einzelnen substanziellen Punkte auf ihnen dabei so geführt werden, daß sie stets *normal zu den Kurven* fortschreiten. Der ganze Prozeß soll analytisch mittels eines Parameters ϑ darzustellen sein und dem Werte $\vartheta = 0$ sollen die Kurven in dem wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeitlinien innerhalb der Sichel entsprechen. Ein solcher Prozeß soll eine *virtuelle Verrückung in der Sichel* heißen.

Der Punkt x, y, z, t in der Sichel für $\vartheta = 0$ möge beim Parameterwerte ϑ nach $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $t + \delta t$ gekommen sein; letztere Größen sind dann Funktionen von x, y, z, t, ϑ. Fassen wir wieder einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden an der Stelle x, y, z, t auf mit einem Normalquerschnitte von einem Inhalte dJ_n und ist $dJ_n + \delta dJ_n$ der Inhalt des Normalquerschnitts an der entsprechenden Stelle des variierten Fadens, so wollen wir dem *Prinzipe von der Erhaltung der*

Massen in der Weise Rechnung tragen, daß wir an dieser variierten Stelle eine Ruh-Massendichte $\nu + \delta\nu$ gemäß

$$(8) \qquad (\nu + \delta\nu)(dJ_n + \delta dJ_n) = \nu dJ_n = dm$$

annehmen, unter ν die wirkliche Ruh-Massendichte an x, y, z, t verstanden. Zufolge dieser Festsetzung variiert dann das Integral (7), über das Gebiet der Sichel erstreckt, bei der virtuellen Verrückung als eine bestimmte Funktion $\mathsf{N} + \delta\mathsf{N}$ von ϑ und wir wollen diese Funktion $\mathsf{N} + \delta\mathsf{N}$ die *Massenwirkung* bei der virtuellen Verrückung nennen.

Ziehen wir die Schreibweise mit Indizes heran, so wird sein:

$$(9) \qquad d(x_h + \delta x_h) = dx_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta} d\vartheta \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}.$$

Nun leuchtet auf Grund der schon gemachten Bemerkungen alsbald ein, daß der Wert von $\mathsf{N} + \delta\mathsf{N}$ beim Parameterwerte ϑ sein wird:

$$(10) \qquad \mathsf{N} + \delta\mathsf{N} = \iiiint \nu \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} dx\, dy\, dz\, dt,$$

über die Sichel erstreckt, wobei $d(\tau + \delta\tau)$ diejenige Größe bedeutet, die sich aus

$$\sqrt{-(dx_1 + d\delta x_1)^2 - (dx_2 + d\delta x_2)^2 - (dx_3 + d\delta x_3)^2 - (dx_4 + d\delta x_4)^2}$$

mittels (9) und

$$dx_1 = w_1 d\tau, \quad dx_2 = w_2 d\tau, \quad dx_3 = w_3 d\tau, \quad dx_4 = w_4 d\tau, \quad d\vartheta = 0$$

ableitet; es ist also

$$(11) \qquad \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} = \sqrt{-\sum_h \left(w_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} w_k\right)^2} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir den Wert des Differentialquotienten

$$(12) \qquad \left(\frac{d(\mathsf{N} + \delta\mathsf{N})}{d\vartheta}\right)_{(\vartheta = 0)}$$

einer Umformung unterwerfen. Da jedes δx_h als Funktion der Argumente $x_1, x_2, x_3, x_4, \vartheta$ für $\vartheta = 0$ allgemein verschwindet, so ist auch allgemein $\frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} = 0$ für $\vartheta = 0$. Setzen wir nun

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta = 0} = \xi_h \qquad (h = 1, 2, 3, 4),$$

so folgt auf Grund von (10) und (11) für den Ausdruck (12):

$$-\iiiint \nu \sum_h w_h \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_3} w_3 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_4} w_4\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Für die Systeme x_1, x_2, x_3, x_4 auf der Begrenzung der Sichel sollen

$\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4$ bei jedem Werte ϑ verschwinden und sind daher auch $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ überall Null. Danach verwandelt sich das letzte Integral durch partielle Integration in

$$\iiiint \sum_h \xi_h \left(\frac{\partial \nu w_h w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_h w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_h w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_h w_4}{\partial x_4} \right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Darin ist der Klammerausdruck

$$= w_h \sum_k \frac{\partial \nu w_k}{\partial x_k} + \nu \sum_k w_k \frac{\partial w_h}{\partial x_k}.$$

Die erste Summe hier verschwindet zufolge der Kontinuitätsbedingung (6), die zweite läßt sich darstellen als

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_4} \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dw_h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_h}{d\tau}\right),$$

wobei durch $\frac{d}{d\tau}$ Differentialquotienten in Richtung der Raum-Zeitlinie einer Stelle angedeutet werden. *Für den Differentialquotienten* (12) *resultiert* damit endlich *der Ausdruck*

$$\text{(14)} \qquad \iiiint \nu \left(\frac{dw_1}{d\tau} \xi_1 + \frac{dw_2}{d\tau} \xi_2 + \frac{dw_3}{d\tau} \xi_3 + \frac{dw_4}{d\tau} \xi_4 \right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Für eine virtuelle Verrückung in der Sichel hatten wir noch die Forderung gestellt, daß die substanziell gedachten Punkte normal zu den aus ihnen hergestellten Kurven fortschreiten sollten; dies bedeutet für $\vartheta = 0$, daß die ξ_h der *Bedingung*

$$\text{(15)} \qquad w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

zu entsprechen haben.

Denken wir nun an die Maxwellschen Spannungen in der Elektrodynamik ruhender Körper und betrachten wir andererseits unsere Ergebnisse in den §§ 12 und 13, so liegt eine gewisse *Anpassung des Hamiltonschen Prinzipes* für kontinuierlich ausgedehnte elastische Medien *an das Relativitätspostulat* nahe.

An jedem Raum-Zeitpunkte sei (wie in § 13) eine Raum-Zeit-Matrix II. Art

$$\text{(16)} \qquad S = \left| \begin{matrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{matrix} \right|$$

bekannt, worin $X_x, Y_x, \cdots, Z_z, T_x, \cdots, X_t, \cdots, T_t$ reelle Größen sind.

Für eine virtuelle Verrückung in einer Raum-Zeit-Sichel bei den vorhin angewandten Bezeichnungen möge der Wert des Integrals

$$W + \delta W = \iiiint \Big(\sum_{h,k} S_{hk} \frac{\partial (x_k + \delta x_k)}{\partial x_h} \Big) \, dx\, dy\, dz\, dt, \tag{17}$$

über das Gebiet der Sichel erstreckt, die *Spannungswirkung* bei der virtuellen Verrückung heißen.

Die hier vorkommende Summe, ausführlicher und mit reellen Größen geschrieben, ist

$$\begin{aligned} & X_x + Y_y + Z_z + T_t \\ & + X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \cdots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ & - X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} - \cdots + T_x \frac{\partial \delta t}{\partial x} + \cdots + T_t \frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun folgendes *Minimalprinzip für die Mechanik* ansetzen: *Wird irgendeine Raum-Zeit-Sichel abgegrenzt, so soll bei jeder virtuellen Verrückung in der Sichel die Summe aus der Massenwirkung und aus der Spannungswirkung für den wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeitlinien in der Sichel stets ein Extremum sein.*

Der Sinn dieser Aussage ist, daß bei jeder virtuellen Verrückung in den vorhin erklärten Zeichen

$$\left(\frac{d(\delta N + \delta W)}{d\vartheta} \right)_{\vartheta = 0} = 0 \tag{18}$$

sein soll.

Nach den Methoden der Variationsrechnung folgen aus diesem Minimalprinzipe unter Rücksichtnahme auf die Bedingung (15) und mittels der Umformung (14) sogleich die folgenden vier Differentialgleichungen

$$\nu \frac{dw_h}{d\tau} = K_h + \varkappa w_h \qquad (h = 1, 2, 3, 4), \tag{19}$$

wo

$$K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4} \tag{20}$$

die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors I. Art $K = \operatorname{lor} S$ sind und $\varkappa$ ein Faktor ist, dessen Bestimmung auf Grund von $w\bar{w} = -1$ zu erfolgen hat. Durch Multiplikation von (19) mit w_h und nachherige Summation über $h = 1, 2, 3, 4$ findet man $\varkappa = K\bar{w}$ und es wird $K + (K\bar{w})\, w$ offenbar ein zu w *normaler* Raum-Zeit-Vektor I. Art. Schreiben wir die Komponenten dieses Vektors

$$X, \; Y, \; Z, \; iT,$$

so gelangen wir nunmehr zu folgenden *Gesetzen für die Bewegung der Materie:*

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
\nu \frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= X,\\
\nu \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= Y,\\
\nu \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= Z,\\
\nu \frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= T.
\end{aligned}
$$

Dabei gilt

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

und

$$X\frac{dx}{d\tau} + Y\frac{dy}{d\tau} + Z\frac{dz}{d\tau} = T\frac{dt}{d\tau},$$

und auf Grund dieser Umstände würde sich die vierte der Gleichungen (21) als eine Folge der drei ersten darunter ansehen lassen.

Aus (21) leiten wir weiter die Gesetze für die Bewegung eines *materiellen Punktes*, das soll heißen für den Verlauf eines unendlich dünnen Raum-Zeitfadens ab.

Es bezeichne x, y, z, t einen Punkt der im Faden irgendwie angenommenen Hauptlinie. Wir bilden die Gleichungen (21) für die Punkte des *Normalquerschnitts* des Fadens durch x, y, z, t und integrieren sie, mit dem Inhaltselement des Querschnitts multipliziert, über den ganzen Raum des Normalquerschnitts. Sind die Integrale der rechten Seiten dabei R_x, R_y, R_z, R_t und ist m die konstante Masse des Fadens, so entsteht

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
m \frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= R_x,\\
m \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= R_y,\\
m \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= R_z,\\
m \frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= R_t.
\end{aligned}
$$

Dabei ist wieder R mit den Komponenten R_x, R_y, R_z, iR_t ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, der zu dem Raum-Zeit-Vektor I. Art w, Geschwindigkeit des materiellen Punktes, mit den Komponenten

$$\frac{dx}{d\tau},\quad \frac{dy}{d\tau},\quad \frac{dz}{d\tau},\quad i\frac{dt}{d\tau},$$

normal ist. Wir wollen diesen Vektor R die *bewegende Kraft* des materiellen Punktes nennen.

Integriert man jedoch die Gleichungen statt über den Normalquerschnitt des Fadens entsprechend über den *zur t-Achse normalen* Querschnitt des Fadens, der durch x, y, z, t gelegt ist, so entstehen (s. (4)) die Gleichungen (22), multipliziert noch mit $\frac{d\tau}{dt}$, insbesondere als letzte Gleichung darunter

$$m \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \mathfrak{w}_x R_x \frac{d\tau}{dt} + \mathfrak{w}_y R_y \frac{d\tau}{dt} + \mathfrak{w}_z R_z \frac{d\tau}{dt}.$$

Man wird nun die rechte Seite als *Arbeitsleistung* am materiellen Punkte für die Zeiteinheit aufzufassen haben. In der Gleichung selbst wird man dann den *Energiesatz* für die Bewegung des materiellen Punktes sehen und den Ausdruck

$$m\left(\frac{dt}{d\tau} - 1\right) = m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} - 1\right) = m\left(\frac{1}{2}|\mathfrak{w}|^2 + \frac{3}{8}|\mathfrak{w}|^4 + \cdots\right)$$

als *kinetische Energie* des materiellen Punktes ansprechen.

Indem stets $dt > d\tau$ ist, könnte man den Quotienten $\frac{dt - d\tau}{d\tau}$ als das Vorgehen der Zeit gegen die Eigenzeit des materiellen Punktes bezeichnen und dann sich ausdrücken: Die kinetische Energie eines materiellen Punktes ist das Produkt seiner Masse in das Vorgehen der Zeit gegen seine Eigenzeit.

Das *Quadrupel* der Gleichungen (22) zeigt wieder die durch das Relativitätspostulat geforderte volle Symmetrie in x, y, z, it, *wobei der vierten Gleichung*, wie wir dies bereits in der Elektrodynamik analog antrafen, *gleichsam eine höhere physikalische Evidenz zuzuschreiben ist.* Auf Grund der Forderung dieser Symmetrie ist nach dem Muster der vierten Gleichung schon sofort das Tripel der drei ersten Gleichungen aufzubauen und im Hinblick auf diesen Umstand ist die Behauptung gerechtfertigt: *Wird das Relativitätspostulat an die Spitze der Mechanik gestellt, so folgen die vollständigen Bewegungsgesetze allein aus dem Satze von der Energie.*

Ich möchte nicht unterlassen, noch plausibel zu machen, daß nicht von den Erscheinungen der *Gravitation* her ein Widerspruch gegen die Annahme des Relativitätspostulates zu erwarten ist.*)

Ist B^* (x^*, y^*, z^*, t^*) ein fester Raum-Zeitpunkt, so soll der Bereich aller derjenigen Raum-Zeitpunkte $B(x, y, z, t)$, für die

*) In einer ganz anderen Weise, als ich hier vorgehe, hat H. Poincaré (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129) das Newtonsche Attraktionsgesetz dem Relativitätspostulate anzupassen versucht.

$$(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + (z - z^*)^2 = (t - t^*)^2, \quad t - t^* \geqq 0 \tag{23}$$

ist, das *Strahlgebilde* des Raum-Zeitpunktes B^* heißen.

Von diesem Gebilde wird eine beliebig angenommene Raum-Zeitlinie stets nur in einem einzigen Raum-Zeitpunkte B geschnitten, wie einerseits aus der *Konvexität* des Gebildes, andererseits aus dem Umstande hervorgeht, daß alle Richtungen der Raum-Zeitlinie nur Richtungen von B^* nach der konkaven Seite des Gebildes sind. Es heiße dann B^* ein *Lichtpunkt* von B.

Wird in der Bedingung (23) der Punkt $B(x, y, z, t)$ fest, der Punkt $B^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$ variabel gedacht, so stellt die nämliche Relation den Bereich aller Raum-Zeitpunkte B^* dar, die Lichtpunkte von B sind, und es zeigt sich analog, daß auf einer beliebigen Raum-Zeitlininie stets nur ein einziger Punkt B^* vorkommt, der ein Lichtpunkt von B ist.

Es möge nun ein materieller Punkt F von der Masse m bei Vorhandensein eines anderen materiellen Punktes F^* von der Masse m^* eine bewegende Kraft nach folgendem Gesetze erfahren. Stellen wir uns die Raum-Zeitfäden von F und F^* mit Hauptlinien in ihnen vor. Es sei BC ein unendlich kleines Element der Hauptlinie von F, weiter B^* der Lichtpunkt von B, C^* der Lichtpunkt von C auf der Hauptlinie von F^*, sodann OA' der zu B^*C^* parallele Radiusvektor des hyperboloidischen Grundgebildes (2), endlich D^* der Schnittpunkt der Geraden B^*C^* mit dem durch B zu ihr normal gelegten Raume. *Die bewegende Kraft des Massenpunktes F im Raum-Zeitpunkte B möge nun sein derjenige zu BC normale Raum-Zeit-Vektor I. Art, der sich additiv zusammensetzt aus dem Vektor*

$$m m^* \left(\frac{OA'}{B^*D^*}\right)^3 BD^* \tag{24}$$

in Richtung BD^* und dazu einem geeigneten Vektor in Richtung B^*C^*. Dabei ist unter $\frac{OA'}{B^*D^*}$ das Verhältnis der betreffenden zwei parallelen Vektoren verstanden.

Es leuchtet ein, daß diese Festsetzung einen kovarianten Charakter in bezug auf die Lorentzsche Gruppe trägt.

Wir fragen nun, wie sich hiernach der Raum-Zeitfaden von F verhält, falls der materielle Punkt F^* eine gleichförmige Translationsbewegung ausführt, d. h. die Hauptlinie des Fadens von F^* eine Gerade ist. Wir verlegen den Raum-Zeit-Nullpunkt O in sie und können durch eine Lorentz-Transformation diese Gerade als t-Achse einführen. Nun bedeute x, y, z, t den Punkt B und es sei τ^* die Eigenzeit des Punktes B^*, von O aus gerechnet. Unsere Festsetzung führt hier zu den Gleichungen

$$(25)\qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{m^* x}{(t-\tau^*)^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{m^* y}{(t-\tau^*)^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{m^* z}{(t-\tau^*)^3}$$

und

$$(26)\qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = -\frac{m^*}{(t-\tau^*)^2}\,\frac{d(t-\tau^*)}{dt},$$

wobei

$$(27)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = (t-\tau^*)^2$$

und

$$(28)\qquad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

ist. Die drei Gleichungen (25) lauten in Anbetracht von (27) genau wie die Gleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktes unter Anziehung eines festen Zentrums nach dem Newtonschen Gesetze, nur daß statt der Zeit t die Eigenzeit τ des materiellen Punktes tritt. Die vierte Gleichung (26) gibt sodann den Zusammenhang zwischen Eigenzeit und Zeit für den materiellen Punkt.

Es möge nun die Bahn des Raumpunktes x, y, z für die verschiedenen τ eine Ellipse mit der großen Halbachse a, der Exzentrizität e sein und in ihr E die exzentrische Anomalie bedeuten, T den Zuwachs an Eigenzeit für einen vollen Umlauf in der Bahn, endlich $n\mathrm{T} = 2\pi$ sein, sodaß bei geeignetem Anfangspunkte von τ die Keplersche Gleichung

$$(29)\qquad n\tau = E - e\sin E$$

besteht. Verändern wir noch die Zeiteinheit und bezeichnen die Lichtgeschwindigkeit mit c, so entsteht aus (28):

$$(30)\qquad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 = \frac{m^*}{ac^2}\,\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}.$$

Unter Vernachlässigung von c^{-4} gegen 1 folgt dann

$$n\,dt = n\,d\tau\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{m^*}{ac^2}\,\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)$$

woraus mit Benutzung von (29) sich

$$(31)\qquad nt + \text{konst.} = \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{m^*}{ac^2}\right)n\tau + \frac{m^*}{ac^2}\sin E$$

ergibt. Der Faktor $\frac{m^*}{ac^2}$ hierin ist das Quadrat des Verhältnisses einer gewissen mittleren Geschwindigkeit von F in seiner Bahn zur Lichtgeschwindigkeit. Wird für m^* die Masse der Sonne, für a die halbe große Achse der Erdbahn gesetzt, so beträgt dieser Faktor 10^{-8}.

Ein Anziehungsgesetz für Massen gemäß der eben erörterten und mit dem Relativitätspostulate verbundenen Formulierung würde zugleich eine *Fortpflanzung der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit* bedeuten. In Anbetracht der Kleinheit des periodischen Termes in (31) dürfte eine Entscheidung *gegen* ein solches Gesetz und die vorgeschlagene modifizierte Mechanik zugunsten des Newtonschen Attraktionsgesetzes mit der Newtonschen Mechanik aus den astronomischen Beobachtungen nicht abzuleiten sein.

Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Aus dem Nachlaß von

HERMANN MINKOWSKI

bearbeitet von MAX BORN in Göttingen.

Kurze Zeit vor seinem Tode hat mir Hermann Minkowski gesprächsweise den Grundgedanken der vorliegenden Arbeit mitgeteilt. Es handelt sich dabei um eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, die sich nahe an den von H. A. Lorentz eingeschlagenen Weg*) anschließt; es sollen nämlich aus den im freien Äther geltenden Grundgleichungen die Gesetze für bewegte Körper dadurch hergeleitet werden, daß die Bewegungen der in der Materie eingebetteten Elektrizität (Elektronen) verfolgt werden. Minkowski behauptete damals, daß der von Lorentz eingeschlagene Weg, die Mittelwerte der von den Elektronen herrührenden Effekte zu bestimmen, mathematisch äquivalent sei einer Reihenentwicklung nach einem Parameter, der die mittlere Verschiebung der Elektronen aus ihren Ruhelagen im Inneren der Materie mißt. Einige Tage später teilte er mir mit, daß das Glied 1. Ordnung in dieser Reihe in der Tat als dielektrische Polarisation gedeutet werden könne; seiner Überzeugung nach müsse das Glied 2. Ordnung die Magnetisierung darstellen. Aus der Beschäftigung mit diesen Gedankengängen hat ihn der Tod herausgerissen.**)

Als mir von Herrn Hilbert die auf die Elektrodynamik bezüglichen Papiere Minkowskis anvertraut wurden, habe ich sogleich gesucht, ob

---

*) Vgl. H. A. Lorentz, Enzykl. der math. Wissensch. Bd. V 2, Art. 14, Abschnitt IV, Elektromagnetische Vorgänge in ponderablen Körpern, S. 200.

M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Leipzig 1908, 2. Aufl., 2. Abschnitt, Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern, § 28, S. 238.

**) In seinem auf der 80. Naturforscher-Versammlung zu Cöln gehaltenen Vortrage „Raum und Zeit" (Phys. Zeitschrift 10, S. 104, 1909, und Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. 18, S. 75; auch als Sonderabdruck erschienen, Leipzig, B. G. Teubner 1909) hat Minkowski auf die Möglichkeit einer solchen elektronentheoretischen Ableitung der Grundgleichungen hingewiesen und eine Veröffentlichung darüber in Aussicht gestellt.

darin auf den genannten Gegenstand bezügliche Aufzeichnungen vorhanden seien. Ich konnte aber nur wenige Anhaltspunkte finden; denn diese über hundert eng mit Formeln bedeckten Blätter enthalten kein einziges Wort des Textes oder der Erklärung der gebrauchten Zeichen. Erst als es mir gelungen war, die Minkowskischen Ideen gemäß seinen mündlichen Mitteilungen zu rekonstruieren, habe ich in seinen Aufzeichnungen Stellen gefunden, die mit den von mir gewonnenen Formeln identisch zu sein scheinen.

Aus diesen Gründen übergebe ich diese Arbeit unter Minkowskis Namen der Öffentlichkeit. In der Ausdrucksweise und den Bezeichnungen werde ich mich nach Möglichkeit Minkowskis Gebrauche anschließen, und ich verweise dieserhalb auf seine Abhandlung: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.**)

Einleitung.

In der zitierten Abhandlung hat Minkowski die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern mit Hilfe der in § 8, S. 21, formulierten Axiome aufgestellt. Dabei werden die in der Tat wohl nicht mehr angefochtenen Grundgleichungen für ruhende Körper (§ 7, Gleichungen (I) bis (V), S. 20) als bekannt vorausgesetzt.

Dieser Standpunkt entspricht nicht den Absichten von H. A. Lorentz, der die Vorgänge in materiellen Körpern durch geeignete Hilfshypothesen über Verschiebungen und Bewegungen der in die Materie eingelagerten Elektronen zu erklären sucht. Hierbei werden nicht die aus der Erfahrung induktiv gewonnenen Maxwell-Hertzschen Grundgleichungen für ruhende materielle Körper, sondern die für den reinen Äther von Lorentz hypothetisch angenommenen Gesetze, die eine Art Idealisierung der Maxwellschen Gleichungen sind, als Ausgangspunkt gewählt. Diese Gesetze verknüpfen die Vektoren *elektrische Feldstärke* $\mathfrak{E}$ und *magnetische Erregung des reinen Äthers* $\mathfrak{M}$**) mit dem Konvektionsstrom der Elektrizität; ist $\tilde{\varrho}$ die *Raumdichte* und $\tilde{\mathfrak{w}}$ der Raumvektor *Geschwindigkeit der Elektrizität* (der Elektronen), so lauten die Grundgleichungen für den Äther:

---

*) Vorstehend abgedruckt aus den Nachr. der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math. phys. Kl. S. 54, 1908. (Im folgenden zitiert als „Grundgleichungen"; die Seitenzahlen der Zitate beziehen sich auf vorstehenden Abdruck.)

**) In Übereinstimmung mit H. A. Lorentz haben wir die den Zustand des Äthers charakterisierenden Vektoren in dieser Weise zu bezeichnen, um sie nachher in den Grundgleichungen für materielle Körper richtig deuten zu können; daraus entspringt die Abweichung der hier gebrauchten Bezeichnung von der Minkowskis in § 2 der zitierten Arbeit.

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{M} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\tilde{\varrho}\,\tilde{\mathfrak{w}},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \tilde{\varrho},$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0.$$

Dabei ist irgendein Bezugsystem rechtwinkliger Koordinaten x, y, z und der Zeit t angenommen; die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume ist mit c bezeichnet.*)

Lorentz teilt nun die Elektronen, deren Ladungen und Bewegungen in den rechten Seiten der Gleichungen (I), (II) auftreten, in mehrere Gruppen ein. Die erste Gruppe bilden die *Leitungselektronen*, die sich wesentlich unabhängig von der Materie durch diese hindurch bewegen; sie konstituieren den „Leitungsstrom" und ihre Ladungen bilden die „wahre Elektrizität". Die zweite Gruppe bilden die *Polarisationselektronen*, die Gleichgewichtslagen im Inneren der materiellen Moleküle besitzen, aus denen sie durch die Einwirkung des elektromagnetischen Feldes verschoben werden können; die dadurch abgeänderte Dichte der Elektrizität wird als die der „freien Elektrizität" bezeichnet. Die dritte Gruppe sind die *Magnetisierungselektronen*, die Umlaufsbewegungen um Zentra innerhalb der Materie ausführen und, analog den Ampèreschen molekularen Kreisströmen, zu den Erscheinungen der Magnetisierung Anlaß geben. Indem nun Lorentz die Mittelwerte der Anteile des Konvektionsstromes, die von den drei Arten der Elektronen herrühren, in geeigneter Weise umformt, gelangt er zu seinen Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in den materiellen Körpern. Wie Minkowski**) gezeigt hat, sind diese Gleichungen für bewegte Körper nicht mit dem Relativitätspostulat vereinbar; und die Gleichungen, die Lorentz speziell für nichtmagnetisierte Körper angibt, sind es nur approximativ, was aber seinerseits nur durch zwei sich kompensierende Widersprüche gegen das Relativitätsprinzip zustande kommt.***)

Indem wir uns die Aufgabe stellen, die Grundgleichungen für bewegte Körper allgemein auch unter Zulassung der Magnetisierung aus

*) Um den Vergleich mit der Lorentzschen Theorie zu erleichtern, habe ich es vermieden, $c = 1$ zu setzen; durch den Gebrauch der Minkowskischen Indizesbezeichnung wird die Rechnung durch das Mitführen von c nicht belastet.

**) Grundgleichungen, Einleitung, S. 7. Vgl. auch S. 80 vorliegender Arbeit.

***) Letzteren Mangel hat Herr Ph. Frank (Ann. d. Phys. (4), 27, 1908, S. 1059) beseitigt, indem er, dem Lorentzschen Gedankengange sonst im wesentlichen folgend, die dem Relativitätspostulate äquivalente Kontraktionshypothese an einer früheren Stelle einführt, als es bei Lorentz geschieht.

den Grundgleichungen im Äther abzuleiten*), bemerken wir zuerst, daß von der charakteristischen Hypothese der Elektronentheorie, der atomistischen Struktur der Elektrizität, bei der Lorentzschen Ableitung nur ein sehr beschränkter Gebrauch gemacht wird; denn durch die Mittelwertbildung über „physikalisch unendlich kleine" Bereiche wird diese Struktur vollständig verwischt, und die Mittelwerte, auf die es allein ankommt, werden als stetige Funktionen des Ortes und der Zeit angesehen.

Wir verzichten daher überhaupt darauf, auf die feinere Struktur der Elektrizität einzugehen. Von den Lorentzschen Vorstellungen benutzen wir nur soviel, daß wir annehmen, die *Elektrizität sei ein Kontinuum, das die Materie überall durchdringt, zum Teil sich frei innerhalb derselben bewegen kann, zum Teil aber an sie gefesselt ist und nur sehr kleine Bewegungen relativ zu ihr ausführen kann.*

Will man näheren Anschluß an Lorentz erreichen, so kann man alle im folgenden vorkommenden Größen als jene Lorentzschen Mittelwerte ansehen; es ist dann aber hier nicht nötig, sie als solche durch besondere Zeichen von den auf die einzelnen Elektronen bezogenen Größen zu unterscheiden, weil wir von den letzteren nirgends Gebrauch machen.

Um von vornherein sicher zu sein, daß alle Formeln mit dem Relativitätspostulate in Übereinstimmung sind, genügt es, bei der mathematischen Formulierung der soeben ausgesprochenen Grundannahme die von Minkowski eingeführte vierdimensionale Vektorrechnung und die von ihm statuierten Symmetrien, vor allem die der Raumkoordinaten x, y, z und der mit ci multiplizierten Zeit t, in den Vordergrund zu rücken. Dadurch wird die Kovarianz der Formeln gegenüber Lorentz-Transformationen in Evidenz gesetzt.

Ferner setzen wir voraus, daß alle vorkommenden Geschwindigkeiten kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind.

*) Herr M. Abraham weist in der zweiten Auflage seines Buches „Elektromagnetische Theorie der Strahlung" in § 50, S. 396, auf die Möglichkeit hin, daß in der Elektrodynamik bewegter ponderabler Körper das Relativitätsprinzip gelte, während es in der Dynamik der freien Elektronen (Kathoden-, Becquerelstrahlen) nicht zuträfe. Diese Ansicht wird wohl durch die neuesten Versuchsergebnisse nicht gestützt. Vorliegende Ableitung der Grundgleichungen für bewegte Körper aus den für freie Elektronen geltenden Gesetzen setzt, ganz im Sinne Minkowskis, die allgemeine Gültigkeit des Prinzips auch für die letzteren voraus.

§ 1.

Bezeichnungen.

Nach Minkowski ersetzen wir:

$$x, y, z, ict$$

durch

$$x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Mit $\mathfrak{w}$ bezeichnen wir den Raumvektor *Geschwindigkeit der Materie* mit den Komponenten

$$\mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y, \mathfrak{w}_z.$$

Aus diesen bilden wir den Raum-Zeit-Vektor I. Art w mit den Komponenten:

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}},$$

wobei $|\mathfrak{w}| = \sqrt{\mathfrak{w}_x^2 + \mathfrak{w}_y^2 + \mathfrak{w}_z^2}$ den Betrag der Geschwindigkeit bedeutet. Die Größen w_α erfüllen die Relation:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1.$$

Die *Geschwindigkeit der Elektrizität* haben wir in (I) bis (IV) mit $\tilde{\mathfrak{w}}$ bezeichnet; zu diesem Raumvektor ordnen wir in analoger Weise einen Raum-Zeit-Vektor I. Art $\tilde{w}$ zu.

Aus der Dichte $\tilde{\varrho}$ der Elektrizität bilden wir die gegenüber Lorentz-Transformationen invariante *Ruh-Dichte:*

$$\tilde{\varrho}_0 = \tilde{\varrho}\sqrt{1-\frac{|\tilde{\mathfrak{w}}|^2}{c^2}}.$$

Die Raumvektoren magnetische Erregung $\mathfrak{M}$ und elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ fassen wir zu dem Raum-Zeit-Vektor II. Art F zusammen, indem wir

$$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z$$

durch

$$F_{23}, F_{31}, F_{12}, \quad F_{14}, \quad F_{24}, \quad F_{34}$$

ersetzen.

Mit Hilfe des Minkowskischen Differentialoperators lor, der als der Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right|$$

definiert ist, können wir dann die Grundgleichungen (I) bis (IV) in folgende symbolische Gleichungen zusammenfassen:

(A) $\quad \text{lor}\, F = -\tilde{\varrho}_0 \tilde{w},$

(B) $\quad \text{lor}\, F^* = 0.$

§ 2.

Die Zerlegung der elektrischen Strömung.

Die Strömung der Elektrizität, die durch den Raum-Zeit-Vektor $\widetilde{w}$ und die Ruh-Dichte $\tilde{\varrho}_0$ charakterisiert ist, denken wir uns aus zwei sich superponierenden Teilen zusammengesetzt.

Der 1. Teil, der aus den Lorentzschen „Leitungselektronen" gebildet zu denken ist, habe die Ruh-Dichte $\varrho_0^{(l)}$ und der zugehörige Raum-Zeit-Vektor Geschwindigkeit sei mit $w^{(l)}$ bezeichnet. Überhaupt werden alle auf diesen Stromanteil bezüglichen Größen durch den oberen Index l gekennzeichnet. Dieser Teil des Konvektionsstromes bewege sich unabhängig von der Bewegung der Materie innerhalb derselben. Er wird zur Entstehung des Leitungsstroms Veranlassung geben.

Der 2. Teil der Strömung, der von den Lorentzschen Polarisations- und Magnetisierungselektronen gebildet ist, soll im wesentlichen der Bahn der Materie folgen und nur wenig von ihr abweichen, und zwar soll folgendes statthaben:

Von den in den materiellen neutralen Punkten vereinigten und sich dort kompensierenden Elektrizitätsmengen sei ein Quantum aus dieser Ruhelage verschoben und führe sowohl Bewegungen relativ zur Materie aus, als auch werde es von dieser mitgeführt.

Um diese Annahme zu formulieren, denken wir uns vorläufig (indem wir die das Relativitätsprinzip berücksichtigende nähere Bestimmung dieser Verschiebung für § 3 vorbehalten) sowohl die Ruh-Dichte, als auch die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors dieses Stromanteils außer von x, y, z, t noch abhängig von einem Parameter ϑ derart, daß für $\vartheta = 0$ die Ruh-Dichte verschwindet und die Geschwindigkeitskomponenten in die entsprechenden der Materie übergehen. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Abweichungen werden wir nach Potenzen von ϑ entwickeln können; bezeichnen wir die Differentiation nach ϑ bei festen x, y, z, t mit δ, so wird man für diesen zweiten Teil des Konvektionsstromes

$$\vartheta \cdot \delta(\varrho_0 w) + \frac{\vartheta^2}{2} \delta\delta(\varrho_0 w) + \cdots$$

schreiben können. Die gesamte Strömung der Elektrizität ist demnach:

$$\tilde{\varrho}_0 \widetilde{w} = \varrho_0^{(l)} w^{(l)} + \vartheta\delta(\varrho_0 w) + \frac{\vartheta^2}{2} \delta\delta(\varrho_0 w) + \cdots.$$

Die Glieder dieser Reihe werden wir einzeln betrachten und zeigen, daß das erste Glied, das von ϑ frei ist, den von Minkowski mit s bezeichneten Stromvektor bildet, der den Leitungsstrom und den an der Materie haftenden Konvektionsstrom der Elektrizität darstellt, daß das zweite Glied mit

dem Faktor ϑ als der Hauptteil der dielektrischen Polarisation der Materie zu deuten ist und das dritte Glied mit ϑ^2 einerseits zu dieser Polarisation noch einen Beitrag liefert, andererseits als Magnetisierung der Materie aufgefaßt werden muß.

Die Frage nach der Bedeutung der höheren Glieder der Reihe (1) fällt aus dem Rahmen der vorliegenden Untersuchung heraus. Bedenkt man, daß bereits die Magnetisierbarkeit bei den meisten Substanzen äußerst gering ist, derart, daß schon das in ϑ quadratische Glied der Reihe (1) einen kleinen numerischen Wert bekommt, so wird man annehmen können, daß der Einfluß der höheren Glieder auf die Beobachtungen bei den meisten Substanzen unmerklich ist, sofern ihnen überhaupt eine physikalische Bedeutung zukommt. Die Eigenschaften der stark magnetisierbaren (ferromagnetischen) Körper sind aber überhaupt noch zu wenig aufgeklärt, als daß man von ihnen aus für eine so weitgehende Theorie experimentelle Stützen erwarten dürfte.

§ 3.
Die Darstellung der variierten Strömung.

Den im vorigen Paragraphen betrachteten zweiten Teil der Strömung kann man analytisch als eine „Variation" der Strömung der Materie ansehen.*) Um diese näher zu charakterisieren, stellen wir diesen Anteil des Konvektionsstroms analog der nach Lagrange bezeichneten Weise dadurch dar, daß wir x, y, z und t als Funktionen dreier Parameter, ξ, η, ζ, welche die einzelnen materiellen Teilchen individualisieren, und der Eigenzeit τ ansehen; außerdem mögen diese vier Funktionen noch von einem Parameter ϑ derart abhängen, daß sie für $\vartheta = 0$ die Bewegung der Materie darstellen; wir schreiben also

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \\ t &= t(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \end{aligned}$$

wobei identisch in allen 5 Argumenten die Bedingung

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 = -c^2$$

erfüllt sein möge. Die Geschwindigkeitskomponenten der Materie sind

*) Diese Variation ist nicht unähnlich der virtuellen Verrückung, die Minkowski im Anhang der zitierten Arbeit zur Ableitung der Grundgleichungen der Mechanik benützt.

$$w_1 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}, \qquad w_2 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0},$$
$$w_3 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}, \qquad w_4 = i\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}.$$

Ersetzen wir

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ ic\tau$$

durch

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4,$$

so können wir kurz schreiben:

$$(2') \qquad x_\alpha = x_\alpha(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4;\ \vartheta), \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

$$(3') \qquad \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right)^2 = 1.$$

Wir wollen für die häufig vorkommenden Differentiationsprozesse folgende Abkürzungen gebrauchen. Eine Funktion φ von $x_1, x_2, x_3, x_4, \vartheta$ kann man vermöge der Transformation (2') auch als Funktion von ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ϑ ansehen. Wir bezeichnen

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_4}$ bei festgehaltenen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vartheta$ mit φ',

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ „ „ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ mit $\dot{\varphi}$,

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ „ „ x_1, x_2, x_3, x_4 mit $\delta\varphi$.

Die Operationen φ', $\dot{\varphi}$ sind also vertauschbar; die Operation $\delta\varphi$ ist aber mit keiner der beiden ersten vertauschbar.

Die Ruh-Dichte ϱ_0 der Elektrizität wird ebenfalls eine Funktion der ξ_α und ϑ sein:

$$\varrho_0 = \varrho_0(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4;\ \vartheta).$$

Da wir voraussetzen, daß die Materie vor der Verrückung, d. h. für $\vartheta = 0$, elektrisch neutral sei, müssen wir annehmen, daß

$$\varrho_0(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4;\ 0) = 0$$

sei.

Dagegen setzen wir voraus, daß die Größen

$$\varrho_0\dot{x}_1,\ \varrho_0\dot{x}_2,\ \varrho_0\dot{x}_3,\ \varrho_0\dot{x}_4$$

sowie ihre Ableitungen nach ϑ *bei festgehaltenen* x_1, x_2, x_3, x_4 *für* $\vartheta = 0$ *endliche, nicht identisch verschwindende Grenzwerte besitzen.*

Daß dies mit den über die x_α und ϱ_0 gemachten Annahmen verträglich ist, zeigt z. B. der Ansatz

$$x_\alpha = f_\alpha(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4) + \vartheta^{\frac{1}{2}}\varphi_\alpha(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4),$$
$$\varrho_0 = \vartheta^{\frac{1}{2}}\psi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4);$$

hier stellt

$$x_\alpha = f_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

die Strömung der Materie dar, ϱ_0 verschwindet für $\vartheta = 0$; es bleibt aber

$$\varrho_0 \dot{x}_\alpha = \frac{1}{2} \varphi_\alpha \cdot \psi$$

endlich und von Null verschieden.

Der Sinn dieser Forderung ist der:

Es soll durch die Verschiebung der Ladungen aus ihrer Ruhelage jedes neutrale Teilchen der Materie in ein geladenes System (im einfachsten Falle in einen Dipol) verwandelt werden; im Sinne der Elektronentheorie werden die Größen $\varrho_0 \dot{x}_\alpha$ die „elektrischen Momente" der Teilchen bestimmen; in der Tat werden wir diesen Umstand im folgenden klar erkennen. Daher müssen wir diesen Produkten für $\vartheta = 0$ einen endlichen Grenzwert zuschreiben. Man kann das auch so ausdrücken, daß unsere Variation der Strömung eine Art „räumlicher Doppelbelegung" der Materie ist. Die Funktionen x_α sind infolge dieses Umstandes bei $\vartheta = 0$ nicht in Potenzreihen entwickelbar; wohl ist dieses aber, wie wir sehen werden, mit den Komponenten des Konvektionsstroms $i\varrho_0 x'_\alpha$ der Fall, auf die es allein ankommt; hier bedeuten die vier Größen ix'_α die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors Geschwindigkeit; sie gehen für $\vartheta = 0$ in die Komponenten w_α der Geschwindigkeit der Materie über.

Der *Unzerstörbarkeit der Elektrizität* tragen wir dadurch Rechnung, daß wir die „Kontinuitätsbedingung"

$$\frac{\partial \varrho_0 x'}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 y'}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 z'}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 t'}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

oder kurz

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \varrho_0 x'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{4'}$$

identisch in den x_α und ϑ erfüllt annehmen.

Wir müssen noch eine weitere Voraussetzung über die Größen $\dot{x}_\alpha$ machen, die die Verschiebung des elektrischen Teilchens aus seiner Ruhelage bestimmen. *Wir nehmen an, daß die Verschiebung jedes elektrischen Teilchens in einem Bezugsysteme, in dem das zu denselben Werten ξ, η, ζ gehörige materielle Teilchen ruht, durch einen Raumvektor* (d. h. einen Raum-Zeit-Vektor I. Art mit verschwindender Zeitkomponente) *dargestellt wird.*

Das läuft darauf heraus, daß die Raum-Zeit-Vektoren I. Art $\dot{x}$ und w normal sind (vgl. Minkowski, „Grundgleichungen", § 11, 6°, S. 31):

(5) $$\sum_{\alpha=1}^{4} w_\alpha \dot{x}_\alpha = 0 .$$

Demnach hat die Variation der Zeit $\dot{t}$ die Bedeutung des folgenden skalaren Produkts

(5') $$\dot{t} = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x \dot{x} + \mathfrak{w}_y \dot{y} + \mathfrak{w}_z \dot{z}).$$

Aus (5) ergibt sich speziell durch Multiplikation mit ϱ_0 und Differentiation nach ϑ bei festgehaltenen x, y, z, t:

(6) $$\sum_{\alpha=1}^{4} w_\alpha \delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha) = 0$$

oder

(6') $$\delta(\varrho_0 \dot{t}) = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x \delta(\varrho_0 \dot{x}) + \mathfrak{w}_y \delta(\varrho_0 \dot{y}) + \mathfrak{w}_z \delta(\varrho_0 \dot{z})).$$

Eine weitere Normalitätsbedingung erhält man, wenn man die Identität (3) bzw. (3') nach ϑ bei festen x, y, z, t differenziert:

(7) $$\sum_{\alpha=1}^{4} x'_\alpha \delta x'_\alpha = 0 .$$

Geht man hier zur Grenze $\vartheta = 0$ über, so kommt:

(7') $$\sum_{\alpha=1}^{4} w_\alpha \delta w_\alpha = 0 .$$

Dabei haben die δw_α die folgende Bedeutung:

(8) $$\begin{aligned} \delta w_1 &= \delta\left(\frac{\mathfrak{w}_x}{c\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}\right) = i[\delta x'_1]_{\vartheta=0}, \text{ usf.} \\ \delta w_4 &= \delta\left(\frac{i}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}\right) = i[\delta x'_4]_{\vartheta=0} . \end{aligned}$$

Endlich betrachten wir die *Variation der Ruh-Dichte* ϱ_0. Diese soll nicht unabhängig variieren, sondern so, daß ihre Ableitung nach ϑ an einer Stelle x, y, z, t mit dem elektrischen Momente $\varrho_0 \dot{x}$ an dieser Stelle durch die Identität in den x_α und ϑ

(9) $$\frac{\partial \varrho_0 \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 \dot{t}}{\partial t} = -\delta \varrho_0$$

oder

(9') $$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \varrho_0 \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\delta \varrho_0$$

verbunden ist.

Die Bedeutung dieser Gleichung ist die folgende: Wir nahmen an, daß das verschobene Quantum Elektrizität vor der Verschiebung durch die gleiche Menge entgegengesetzter Elektrizität kompensiert wurde; daher ist die linke Seite von Gleichung (9) nicht Null, was bedeuten würde, daß die Abnahme der in einem Volumen befindlichen Elektrizitätsmenge bei der Verschiebung gleich der durch die Begrenzung des Volumens tretenden Menge ist; vielmehr tritt bei der Verschiebung jene vorher kompensierte Ladung des entgegengesetzten Vorzeichens zutage, und das ist eben in erster Näherung die bei festgehaltenen x, y, z, t genommene Ableitung $-\delta\varrho_0$. Die spezielle Form obigen Ansatzes wird durch die vom Relativitätsprinzip geforderte Symmetrie gerechtfertigt.

§ 4.

Die Reihenentwicklung der variierten Strömung.

Unsere Aufgabe ist es, die Größen $\varrho_0 x'_\alpha$ in jedem Raum-Zeitpunkte, d. h. bei festgehaltenen x_α, in einer Potenzreihe nach ϑ zu entwickeln; gemäß der Bedeutung des Symbols δ haben wir also:

$$\varrho_0 x'_\alpha = \vartheta\delta(\varrho_0 x'_\alpha)_0 + \frac{\vartheta^2}{2}\delta\delta(\varrho_0 x'_\alpha)_0 + \cdots, \tag{10}$$

wo in den Koeffizienten $\vartheta = 0$ zu setzen ist.

Es ist

$$\delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \varrho_0 \delta x'_\alpha + x'_\alpha \delta\varrho_0.$$

Wir wollen die Operation δ durch den mit dem Punkte bezeichneten „substantiellen“ Differentialquotienten ersetzen. Dazu sehen wir x'_α als Funktion der x_α und ϑ an, wobei die x_α ihrerseits Funktionen der ξ_α und ϑ sind:

$$x'_\alpha = x'_\alpha(x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta), \cdots, x_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta); \vartheta).$$

Dann ergibt sich durch Differentiation nach ϑ bei festen ξ_α:

$$\dot{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}\dot{x}_\beta + \delta x'_\alpha. \tag{α}$$

Andererseits bilden wir dieselbe Größe $\dot{x}'_\alpha$, indem wir zuerst die mit dem Punkte, dann die mit dem Striche bezeichnete Operation vornehmen; sehen wir also $\dot{x}_\alpha$ als Funktion der x_α und ϑ an und die x_α ihrerseits als Funktionen der ξ_α und ϑ:

$$\dot{x}_\alpha = \dot{x}_\alpha(x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta), \cdots, x_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta); \vartheta),$$

so folgt durch Differentiation nach ξ_4 bei festen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vartheta$:

$$\dot{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta} x'_\beta \tag{β}$$

Aus den Gleichungen (α), (β) finden wir:

$$(\gamma) \qquad \delta x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta} x'_\beta - \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta \right).$$

Um $\delta(\varrho_0 x'_\alpha)$ zu erhalten, haben wir dies mit ϱ_0 zu multiplizieren und die mit x'_α multiplizierte Gleichung (9') hinzuzufügen; wir addieren außerdem noch die mit $\dot{x}_\alpha$ multiplizierte Kontinuitätsgleichung (4'), so daß wir schließlich erhalten:

$$\delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{4} \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta} \varrho_0 x'_\beta - \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \varrho_0 \dot{x}_\beta - \frac{\partial \varrho_0 \dot{x}_\beta}{\partial x_\beta} \cdot x'_\alpha + \frac{\partial \varrho_0 x'_\beta}{\partial x_\beta} \dot{x}_\alpha \right)$$

oder

$$(11) \qquad \delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varrho_0 \dot{x}_\alpha \cdot x'_\beta - \varrho_0 \dot{x}_\beta \cdot x'_\alpha).$$

Diese Gleichung gilt identisch in den x_α und ϑ. Wenn wir sie nochmals nach ϑ bei festen x_α differenzieren, können wir diese Operation unter den in der Summe vorkommenden Differentiationszeichen nach x_β ausführen. Daher wird:

$$(12) \quad \delta\delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ [\delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha) \cdot x'_\beta - \delta(\varrho_0 \dot{x}_\beta) \cdot x'_\alpha] + [\varrho_0 \dot{x}_\alpha \delta x'_\beta - \varrho_0 \dot{x}_\beta \delta x'_\alpha] \right\}.$$

Jetzt können wir die Reihe (10) in folgende Gestalt setzen:

$$(13) \quad \varrho_0 x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \left[\vartheta \varrho_0 \dot{x}_\alpha + \frac{\vartheta^2}{2} \delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha) \right] x'_\beta - \left[\vartheta \varrho_0 \dot{x}_\beta + \frac{\vartheta^2}{2} \delta(\varrho_0 \dot{x}_\beta) \right] x'_\alpha \right\}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \frac{\vartheta^2}{2} \varrho_0 \dot{x}_\alpha \delta x'_\beta - \frac{\vartheta^2}{2} \varrho_0 \dot{x}_\beta \delta x'_\alpha \right\} + \cdots,$$

wobei in den Faktoren von $\vartheta, \vartheta^2, \cdots$ überall $\vartheta = 0$ zu setzen ist; dabei haben die Größen $\varrho_0 \dot{x}_\alpha$, $\delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)$ endliche, nicht identisch verschwindende Grenzwerte. Gemäß Verabredung brechen wir die Reihe mit den hingeschriebenen Gliedern ab.

§ 5.

Formale Herstellung der in der bewegten Materie gültigen Differentialgleichungen.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$(14) \qquad \vartheta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0} + \frac{\vartheta^2}{2} \delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0} = p_\alpha,$$

ferner, indem wir uns erinnern, daß

$$i(x'_\alpha)_{\vartheta=0} = w_\alpha, \qquad i(\delta x'_\alpha)_{\vartheta=0} = \delta w_\alpha$$

ist:

(15) $$w_\alpha p_\beta - w_\beta p_\alpha = P_{\alpha\beta},$$

(16) $$\frac{\vartheta^2}{2}\{\delta w_\alpha(\varrho_0 \dot{x}_\beta)_0 - \delta w_\beta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_0\} = Q_{\alpha\beta}.$$

Diese Größen sind die Komponenten der aus den Vektoren erster Art w, p bzw. δw, $\frac{\vartheta^2}{2}(\varrho_0 \dot{x})_0$ durch „vektorielle" Multiplikation gebildeten Raum-Zeit-Vektoren II. Art:

(15') $$[w, p] = P,$$

(16') $$\frac{\vartheta^2}{2}[\delta w, (\varrho_0 \dot{x})_0] = Q.$$

Jetzt fügen wir den Ausdruck (10) zu $\varrho_0^{(l)} w^{(l)}$ hinzu und können, wenn wir noch

(17) $$\varrho_0^{(l)} w_\alpha^{(l)} = s_\alpha$$

setzen, die Komponenten des gesamten Konvektionsstromes (1) in folgender Weise schreiben:

(18) $$\tilde{\varrho}_0 \widetilde{w}_\alpha = s_\alpha - \sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}),$$

oder in der Minkowskischen Symbolik:

(18') $$\tilde{\varrho}_0 \widetilde{w} = s + \mathrm{lor}\,(P + Q).$$

Setzen wir das in die Grundgleichung (A) ein, so geht diese über in

(19) $$\mathrm{lor}\,(F + P + Q) = -s.$$

Führen wir den Raum-Zeit-Vektor II. Art

(20) $$f = F + P + Q$$

ein, so können wir den Grundgleichungen die Gestalt geben:

{A} $$\mathrm{lor}\, f = -s,$$

{B} $$\mathrm{lor}\, F^* = 0.$$

Damit haben wir formal die in der bewegten Materie geltenden Differentialgleichungen gewonnen (siehe Minkowski, Grundgleichungen, § 12, Formeln {A}, {B}, Seite 38).

Ersetzen wir

$$f_{23}, \quad f_{31}, \quad f_{12}, \quad f_{14}, \quad f_{24}, \quad f_{34}$$

durch

$$\mathfrak{m}_x, \quad \mathfrak{m}_y, \quad \mathfrak{m}_z, \quad -i\mathfrak{e}_x, \quad -i\mathfrak{e}_y, \quad -i\mathfrak{e}_z,$$

und

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4$$

durch

$$\frac{1}{c}\mathfrak{s}_x, \quad \frac{1}{c}\mathfrak{s}_y, \quad \frac{1}{c}\mathfrak{s}_z, \quad i\varrho$$

und fassen die hier vorkommenden Größen bzw. zu den Raumvektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$ zusammen, so können wir den Gleichungen $\{A\}$, $\{B\}$ die reelle Gestalt geben:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \frac{1}{c}\mathfrak{s},$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0.$$

Das sind die in ruhenden oder bewegten Körpern geltenden Differentialgleichungen, wenn die Vektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$ bzw. als die magnetische Feldstärke, die dielektrische Erregung, der Strom uud die Größe ϱ als die Dichte der Elektrizität gedeutet werden dürfen. Es wird unsere Aufgabe sein, aus den Definitionsgleichungen (15), (16), (17), (20) diese Bedeutung herauszulesen; die letzteren Gleichungen müssen ferner die Beziehungen enthalten, welche die beiden Vektoren „Erregung“ mit den beiden Vektoren „Feldstärke“ verbinden und in welche die Materialeigenschaften eingehen. Allerdings werden wir sehen, daß, genau wie bei Lorentz, diese Beziehungen hier viel allgemeiner sind als die von Minkowski behandelten, der sich auf isotrope, dispersionsfreie Körper beschränkte; unsere Gleichungen können durch geeignete Zusatzhypothesen den mannigfaltigen Eigenschaften der Substanzen angepaßt werden, und die einfachste Annahme führt auf die von Minkowski erhaltenen Formeln. Um diese Sachlage zu überblicken, behandeln wir zunächst den einfachen Fall ruhender Körper.

§ 6.

Ruhende Körper.

Ruht die Materie, ist also $\mathfrak{w} = 0$, so hat nach § 1 der Raum-Zeit-Vektor w die Komponenten

$$\text{(21)} \qquad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_4 = i.$$

Der Vektor $\mathfrak{s}$ hat hier ohne weiteres die Bedeutung der *Stromstärke des* frei durch die Materie fließenden *Leitungsstroms*; die von diesem transportierte Elektrizitätsmenge $\varrho = \varrho^{(l)}$ heißt gewöhnlich „wahre Elektrizität“, während sie von Minkowski kurzweg *elektrische Ladung* genannt wird.

Aus den Orthogonalitätsbedingungen (5), (5') und (6), (6') folgt, daß für $\mathfrak{w} = 0$

(22) $$p_4 = 0$$

ist. Die Bedeutung der drei ersten Komponenten von p,

$$p_1 = \mathfrak{p}_x, \quad p_2 = \mathfrak{p}_y, \quad p_3 = \mathfrak{p}_z,$$

ist leicht zu erkennen. So ist z. B. das erste Glied $\vartheta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0}$ von p_α in erster Annäherung das elektrische Moment eines Teilchens der Materie, und das zweite Glied von p_α liefert die für jeden Raum-Zeitpunkt x, y, z, t dazu tretende Korrektion, wenn man die Annäherung einen Schritt weiter treibt. Demnach sind die Größen $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ als die Komponenten des Vektors $\mathfrak{p}$, *dielektrische Polarisation*, aufzufassen.

Die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors II. Art P reduzieren sich für $\mathfrak{w} = 0$ wegen (21) und (22) auf:

(23) $$P_{23} = 0, \quad P_{31} = 0, \quad P_{12} = 0, \quad P_{14} = -i\mathfrak{p}_x, \quad P_{24} = -i\mathfrak{p}_y, \quad P_{34} = -i\mathfrak{p}_z.$$

Infolge der Normalitätsbedingungen (5) und (7) sind für $\mathfrak{w} = 0$

(24) $$(\varrho_0 \dot{x}_4)_{\vartheta=0} = 0, \quad \delta w_4 = 0.$$

Daher werden die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors II. Art Q:

(25) $$\begin{aligned} Q_{23} &= \frac{1}{c}\frac{\vartheta^2}{2}\left(\delta\mathfrak{w}_y(\varrho_0\dot{z})_0 - \delta\mathfrak{w}_z(\varrho_0\dot{y})_0\right), & Q_{14} &= 0, \\ Q_{31} &= \frac{1}{c}\frac{\vartheta^2}{2}\left(\delta\mathfrak{w}_z(\varrho_0\dot{x})_0 - \delta\mathfrak{w}_x(\varrho_0\dot{z})_0\right), & Q_{24} &= 0, \\ Q_{12} &= \frac{1}{c}\frac{\vartheta^2}{2}\left(\delta\mathfrak{w}_x(\varrho_0\dot{y})_0 - \delta\mathfrak{w}_y(\varrho_0\dot{x})_0\right), & Q_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten drei dieser Größen sind das mit $\frac{1}{c}$ multiplizierte Vektorprodukt der Relativgeschwindigkeit der Ladung gegen die Materie in das elektrische Moment; bezeichnet man den letzteren Vektor, dessen Komponenten $\vartheta(\varrho_0\dot{x})_0$, $\vartheta(\varrho_0\dot{y})_0$, $\vartheta(\varrho_0\dot{z})_0$ sind, mit $\varrho\dot{\mathfrak{r}}$ und setzt man

(26) $$\mathfrak{q} = \frac{1}{2c}[\varrho\dot{\mathfrak{r}}, \delta\mathfrak{w}],$$

so wird dieser Vektor als *magnetisches Moment**) oder *Magnetisierung* zu bezeichnen sein, und man hat:

(25') $$Q_{23} = -\mathfrak{q}_x, \quad Q_{31} = -\mathfrak{q}_y, \quad Q_{12} = -\mathfrak{q}_z.$$

Jetzt können wir die Gleichung (20) in folgende zwei Vektorgleichungen zerlegen:

(27) $$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{M} - \mathfrak{q}, \\ \mathfrak{e} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

*) Vgl. z. B. M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, 2. Aufl. 1908, § 28, Formel (135), Seite 243.

Das ist der von Lorentz aufgestellte Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$ einerseits und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$ andererseits*); die Polarisation $\mathfrak{p}$ und die Magnetisierung $\mathfrak{q}$ sind dabei als Vektoren anzusehen, die den durch das elektro-magnetische Feld hervorgebrachten Zustand der Materie charakterisieren und demnach von der Art dieser Materie abhängen. Dadurch, daß man die Freiheit hat, diese Abhängigkeit näher zu bestimmen, sei es durch elektronentheoretische Betrachtungen, sei es durch hypothetische Ansätze, kann man die mannigfachen Eigenschaften der Materie dem System der Elektrodynamik einordnen.

Wir wollen uns auf die einfachsten *Zusatzhypothesen* beschränken, die zur Beschreibung *isotroper, nichtdispergierender Körper* dienen:

1. Die Geschwindigkeit des frei beweglichen Teils des Konvektionsstromes, $\mathfrak{w}^{(l)}$, ist in jedem Raum-Zeitpunkte proportional der elektrischen Feldstärke; daraus folgt sofort das Ohmsche Gesetz:

$$\mathfrak{s} = \sigma\mathfrak{E}, \tag{28}$$

wo σ die Leitfähigkeit bedeutet.

2. Die Verschiebung der an der Materie haftenden Ladungen aus ihrer Ruhelage ist proportional der elektrischen Feldstärke; daraus ergibt sich

$$\mathfrak{p} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{e} = \varepsilon\mathfrak{E}, \tag{29}$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante ist.

3. Das Drehmoment der an der Materie haftenden Ladungen um ihre Ruhelage ist proportional der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{m}$; demnach ist

$$\mathfrak{q} = (\mu - 1)\mathfrak{m}, \quad \mathfrak{M} = \mu\mathfrak{m}, \tag{30}$$

wo μ die magnetische Permeabilität bedeutet.

σ, ε und μ können Funktionen von x, y, z, t sein.

Wärend die Hypothesen 1 und 2 eine elektronentheoretische Deutung erlauben, ist das bei der dritten Hypothese noch nicht einwandfrei durchgeführt worden. Verallgemeinert man die Hypothese 2 derart, daß man den Elektronen Trägheit zuschreibt, so gelangt man zur Dispersionstheorie.

§ 7.

Der Leitungsstrom in bewegten Körpern.

Bewegt sich die Materie, so wird man den Vektor $\mathfrak{s}$ nicht mit dem Leitungsstrom identifizieren; vielmehr wird es nur auf die Relativbewegung

*). Vgl. H. A. Lorentz, Enzykl. der math. Wiss. Bd. V 2, Art. 14, Formeln XXX, XXV und XXI, S. 208, 209.

der Elektrizität gegen die Materie ankommen, so daß der Vektor

$$(31)\qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{s} - \varrho\mathfrak{w} = \varrho^{(l)}(\mathfrak{w}^{(l)} - \mathfrak{w})$$

als *Leitungsstrom* zu bezeichnen ist.

Will man jetzt durch eine Zusatzhypothese den Leitungsstrom mit der wirkenden elektrischen Feldstärke in Verbindung setzen, so entspricht es nicht dem Relativitätsprinzipe, die im ruhenden Koordinatensystem gemessene elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in Zusammenhang zu bringen zu der im ruhenden Koordinatensystem gemessenen Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{w}^{(l)} - \mathfrak{w}$. Vielmehr wirkt auf die bewegte Ladung die *elektrische Ruh-Kraft*

$$\Phi = -wF$$

(vgl. Minkowski, Grundgleichungen, § 11, Formeln (47), (48), Seite 33); ihre ersten drei Komponenten sind die x-, y-, z-Komponenten des Raumvektors

$$\frac{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}},$$

dessen Zähler auch nach Lorentz die im Äther auf *bewegte* Ladungen wirkende Kraft darstellt, ihre vierte Komponente ist

$$\Phi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{E})}{c\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}},$$

und der Vektor Φ ist normal zu w:

$$w\bar{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0.$$

Andererseits werden wir als „Relativgeschwindigkeit" im Sinne des Relativitätsprinzips den zu dem Vektor w *normalen* Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$v = w^{(l)} + (w\bar{w}^{(l)})w$$

bezeichnen.

Sehen wir v_1, v_2, v_3 als Komponenten des Raumvektors

$$\frac{\mathfrak{v}}{c\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}^{(l)}|^2}{c^2}}}$$

an, so findet man leicht die Komponenten des Raumvektors $\mathfrak{v}$ in der Richtung von $\mathfrak{w}$ und in einer zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$:

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{w}_{\mathfrak{w}}^{(l)} - |\mathfrak{w}|}{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}},$$

$$\mathfrak{v}_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{w}_{\bar{\mathfrak{w}}}^{(l)}.$$

Daher hängt der Vektor $\mathfrak{v}$ mit dem Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ folgendermaßen zusammen:

$$\varrho^{(l)} \mathfrak{v}_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}}{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}},$$

$$\varrho^{(l)} \mathfrak{v}_{\overline{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{J}_{\overline{\mathfrak{w}}}.$$

Dann gelangen wir zu dem Ohmschen Gesetze für bewegte Körper durch die *Zusatzhypothese*:

Die Relativgeschwindigkeit des frei beweglichen Konvektionsstromes ist proportional der elektrischen Ruh-Kraft; daraus folgt:

$$\varrho^{(l)} v = -\frac{\sigma}{c} wF,$$

oder

$$\{E\} \qquad s + (w\bar{s})w = -\frac{\sigma}{c} wF.$$

Das ist die von Minkowski aufgestellte Relation $\{E\}$, § 12, Seite 38; sie ist äquivalent mit den Vektorgleichungen:

$$(E) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\varrho}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}} &= \sigma\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right)_{\mathfrak{w}}, \\ \mathfrak{s}_{\overline{\mathfrak{w}}} &= \frac{\sigma\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right)_{\overline{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

§ 8.

Die dielektrische Polarisation in bewegten Körpern.

Aus der Gleichung (15′)

$$P = [w, p]$$

folgt:

$$wP = w[w, p] = -(w\bar{p})w + (w\bar{w})p.$$

Nun erkennt man, daß infolge der Gleichungen (5) und (6) der durch (14) definierte Vektor p normal zu w ist, d. h. daß

$$(32) \qquad w\bar{p} = 0$$

ist; da außerdem

$$w\bar{w} = -1$$

ist, bekommt man:

$$(33) \qquad wP = -p.$$

Der Vektor I. Art p steht also zu dem Vektor II. Art P in genau derselben Beziehung wie die elektrische Ruh-Kraft Φ zu dem Feldvektor II. Art F. Wir werden daher p gemäß seiner Definition durch die Gleichungen (14) als *„dielektrische Ruh-Polarisation"* und P als *„dielektrische Polarisation"* bezeichnen; letztere ist also ein Vektor II. Art im Gegensatz zu der gewöhnlichen Auffassung.

Setzen wir wie im vorigen Paragraphen

$$p_1 = \mathfrak{p}_x, \quad p_2 = \mathfrak{p}_y, \quad p_3 = \mathfrak{p}_z,$$

so wird infolge von (32):

$$p_4 = \frac{i}{c}(\mathfrak{w}_x \mathfrak{p}_x + \mathfrak{w}_y \mathfrak{p}_y + \mathfrak{w}_z \mathfrak{p}_z) = \frac{i}{c}(\mathfrak{w}\mathfrak{p}). \tag{32'}$$

Dann sind die Komponenten von P:

$$P_{23} = \frac{\mathfrak{w}_y \mathfrak{p}_z - \mathfrak{w}_z \mathfrak{p}_y}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad P_{31} = \frac{\mathfrak{w}_z \mathfrak{p}_x - \mathfrak{w}_x \mathfrak{p}_z}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad P_{12} = \frac{\mathfrak{w}_x \mathfrak{p}_y - \mathfrak{w}_y \mathfrak{p}_x}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}},$$
$$P_{14} = -i\frac{\mathfrak{p}_x - \frac{\mathfrak{w}_x}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{p})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad P_{24} = -i\frac{\mathfrak{p}_y - \frac{\mathfrak{w}_y}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{p})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad P_{34} = -i\frac{\mathfrak{p}_z - \frac{\mathfrak{w}_z}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{p})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}. \tag{34}$$

Sie setzen sich also aus den Komponenten der Raumvektoren

$$\mathfrak{R} = \frac{[\mathfrak{w}\mathfrak{p}]}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{w}}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{p})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}} \tag{34'}$$

in genau derselben Weise zusammen wie die Komponenten von F aus denen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$. Hier können wir $\mathfrak{R}$ als *Röntgen-Vektor* bezeichnen; denn er gibt Anlaß zur Entstehung des sog. Röntgenstroms. In der Tat stimmt, wie wir in § 10 sehen werden, der Vektor $\mathfrak{R}$ bis auf Glieder zweiter Ordnung in $\frac{\mathfrak{w}}{c}$ überein mit demjenigen Vektor, den auch Lorentz zur Erklärung der von Röntgen entdeckten magnetischen Wirkung polarisierter, bewegter Dielektrika erhält. Der Vektor $\mathfrak{P}$, den man *Raumvektor Polarisation* nennen könnte, unterscheidet sich von der Ruh-Polarisation $\mathfrak{p}$ nur durch Größen 2. Ordnung. Die Komponenten von $\mathfrak{P}$ in der Richtung $\mathfrak{w}$ und einer auf $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$ hängen mit den entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{p}$ so zusammen:

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{w}}\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}, \qquad \mathfrak{P}_{\bar{\mathfrak{w}}} = \frac{\mathfrak{p}_{\bar{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}.$$

Die für isotrope, nichtdispergierende Körper gültige *Zusatzhypothese* ist hier so zu formulieren:

Der Raum-Zeit-Vektor I. Art Ruh-Polarisation p ist proportional der elektrischen Ruh-Kraft Φ:

$$p = (\varepsilon - 1)\Phi. \tag{35}$$

ε ist die Dielektrizitätskonstante.

Hieraus wird sich nachher die Minkowskische Relation $\{C\}$, § 12, Seite 38, ergeben.

§ 9.

Die Magnetisierung bewegter Körper.

Wie der Vektor II. Art P die Polarisation, so wird Q *die Magnetisierung* bedeuten. Tatsächlich haben wir in § 6 gesehen, daß Q sich bei ruhenden Körpern auf einen Raumvektor reduziert, der als „magnetisches Moment" zu deuten ist. Auch bei bewegten Körpern haben diese drei Komponenten von Q dieselbe Form; es sind das die Komponenten des Moments in den Koordinatenebenen yz, zx, xy; dazu treten aber noch drei Größen, welche die Form von Momentkomponenten in den Ebenen xt, yt, zt haben. Der Vektor Q haftet also am Koordinatensystem und kann keine Eigenschaft der bewegten Materie ausdrücken. Vielmehr muß man dazu den zugehörigen Vektor I. Art

$$q = iwQ^* = iw\frac{\vartheta^2}{2}[\delta w, (\varrho_0 \dot{x})_0]^* \tag{36}$$

heranziehen, den wir *Ruh-Magnetisierung* nennen und der zu Q in demselben Verhältnis steht wie die *magnetische Ruh-Kraft*

$$\Psi = iwf^*$$

zu dem Feldvektor f. Die Komponenten von q sind

$$q_1 = -i\frac{\vartheta^2}{2}\begin{vmatrix} w_2, & w_3, & w_4 \\ \delta w_2, & \delta w_3, & \delta w_4 \\ (\varrho_0\dot{x}_1)_0, & (\varrho_0\dot{x}_2)_0, & (\varrho_0\dot{x}_3)_0 \end{vmatrix}, \text{ usf.}$$

Offenbar ist q normal zu w:

$$w\bar{q} = 0. \tag{37}$$

Da die zu q_1, q_2, q_3 gehörigen Determinanten je eine Vertikalreihe mit dem Index 4, d. h. mit rein imaginären Elementen haben, während die zu q_4 gehörige Determinante nur reelle Elemente hat, so sind q_1, q_2, q_3 reell und q_4 ist rein imaginär. Setzen wir also

$$q_1 = -\mathfrak{q}_x,\ q_2 = -\mathfrak{q}_y,\ q_3 = -\mathfrak{q}_z,$$

so sind das die Komponenten eines reellen Raumvektors $\mathfrak{q}$, und wegen (37) wird:

$$(37') \qquad q_4 = -\frac{i}{c}(\mathfrak{w}_x \mathfrak{q}_x + \mathfrak{w}_y \mathfrak{q}_y + \mathfrak{w}_z \mathfrak{q}_z) = -\frac{i}{c}(\mathfrak{w}\mathfrak{q}).$$

Auch den Raumvektor $\mathfrak{q}$ nennen wir *Ruh-Magnetisierung*; offenbar wird er für $\mathfrak{w} = 0$ mit dem in § 6 mit demselben Buchstaben bezeichneten Vektor (26) identisch.

Man kann die Gleichung (36) so deuten, daß sie die Transformation des Drehmomentes auf ein mit der Materie mitgeführtes Koordinatenkreuz ausdrückt; dabei fallen dann die Komponenten des Momentes in den Ebenen xt, yt, zt fort. $\mathfrak{q}$ ist also ein an der Materie haftender Vektor, der ihren Zustand charakterisiert.

Der Vektor I. Art

$$wQ = w\frac{\vartheta^2}{2}[\delta w, (\varrho_0 \dot{x})_0]$$

$$= \frac{\vartheta^2}{2}\left\{-(w, \overline{(\varrho_0 \dot{x})_0})\delta w + (w, \overline{\delta w})(\varrho_0 \dot{x})_0\right\}$$

verschwindet identisch, weil nach (5) und (7) die Vektoren $(\varrho_0 \dot{x})_0$ und δw auf w normal stehen. Wenden wir jetzt die Minkowskische Identität (§ 11, Formel (45), Seite 32)

$$[w, wQ] + [w, wQ^*]^* = (w\bar{w})Q$$

an, so finden wir wegen (36):

$$(38) \qquad [w, q]^* = -iQ.$$

Demnach drücken sich die Komponenten von Q durch die Ruh-Magnetisierung $\mathfrak{q}$ folgendermaßen aus:

$$Q_{23} = -\frac{\mathfrak{q}_x - \frac{\mathfrak{w}_x}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{q})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad Q_{31} = -\frac{\mathfrak{q}_y - \frac{\mathfrak{w}_y}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{q})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad Q_{12} = -\frac{\mathfrak{q}_z - \frac{\mathfrak{w}_z}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{q})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}},$$

$$Q_{14} = -i\frac{\mathfrak{w}_y \mathfrak{q}_z - \mathfrak{w}_z \mathfrak{q}_y}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad Q_{24} = -i\frac{\mathfrak{w}_z \mathfrak{q}_x - \mathfrak{w}_x \mathfrak{q}_z}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad Q_{34} = -i\frac{\mathfrak{w}_x \mathfrak{q}_y - \mathfrak{w}_y \mathfrak{q}_x}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}.$$

Sie setzen sich also aus den Komponenten der Raumvektoren

$$(39') \qquad -\mathfrak{Q} = -\frac{\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{w}}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{q})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}, \quad \mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{w}\mathfrak{q}]}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}$$

ebenso zusammen wie die Komponenten von F aus denen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$.

Der *Raumvektor Magnetisierung* $\mathfrak{Q}$ unterscheidet sich von der Ruh-Magnetisierung $\mathfrak{q}$ nur durch Größen 2. Ordnung in $\frac{\mathfrak{w}}{c}$. Die Komponenten

von $\mathfrak{Q}$ in der Richtung $\mathfrak{w}$ und einer zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$ hängen mit den entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{q}$ so zusammen:

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{w}}\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}, \quad \mathfrak{Q}_{\bar{\mathfrak{w}}} = \frac{\mathfrak{q}_{\bar{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}.$$

Der Vektor $\mathfrak{S}$ gibt, wie wir sehen werden, Anlaß zu elektrostatischen Wirkungen magnetisierter bewegter Medien; er ist das genaue Analogon zu dem „Röntgen-Vektor".

Die für isotrope Körper gültige *Zusatzhypothese* lautet hier:

Der Raum-Zeit-Vektor I. Art Ruh-Magnetisierung q ist proportional der magnetischen Ruh-Kraft Ψ:

$$-q = (\mu - 1)\Psi. \tag{40}$$

μ ist die magnetische Permeabilität.

Hieraus wird sich nachher die Minkowskische Relation $\{D\}$, § 12, Seite 38, ergeben. Über die elektronentheoretische Deutung der Hypothesen $\{E\}$, (35), (40) gilt dasselbe, was in § 6 (S. 73) für ruhende Körper gesagt worden ist. An die Gleichung (35) hat die Theorie der Dispersion bewegter Körper anzuknüpfen.

§ 10.

Die allgemeine Beziehung zwischen den Vektoren Feldstärke und Erregung.

Die Gleichung (20), die den Raum-Zeit-Vektor f definierte, kann man jetzt nach (15′) und (38) so schreiben:

$$\begin{aligned} f &= F + P + Q \\ &= F + [w, p] + i[w, q]^*. \end{aligned} \tag{41}$$

Geht man zu den reellen Raumvektoren über, so ergibt sich nach (34) und (39):

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{M} + \mathfrak{R} - \mathfrak{Q}, \\ \mathfrak{e} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{P} + \mathfrak{S}, \end{aligned} \tag{42}$$

oder, ausführlich geschrieben:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{q} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{p}] - \frac{\mathfrak{w}}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{q})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}} \tag{V′}$$

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{p} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{q}] - \frac{\mathfrak{w}}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{p})}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}. \tag{VI′}$$

Diese Formeln zusammen mit den Differentialgleichungen (I′) bis (IV′) und der Relation (E) stellen, genau im Sinne von H. A. Lorentz, die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten, dielektrisch polarisierten und magnetisierten Körpern dar. Sie sind aber noch durch die Angabe des Zusammenhangs zwischen den Vektoren Ruh-Polarisation $\mathfrak{p}$ und Ruh-Magnetisierung $\mathfrak{q}$ einerseits und den wirkenden Feldstärken andererseits zu ergänzen. Ohne auf diese ergänzenden Beziehungen, die wir für isotrope Körper als „Zusatzhypothesen" formuliert haben, einzugehen, können wir die Formeln (I′) bis (VI′), (E) diskutieren und sie mit den Lorentzschen Formeln vergleichen.

Wir setzen letztere in einer zu unserem Gleichungssystem analogen Formulierung an (Enzykl. der math. Wiss. Bd. V 2, Art. 14, Seite 208, 209); die Differentialgleichungen lauten:

$$\text{(III″) u. (XXVIII)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}(\mathfrak{s} + \operatorname{curl}[\mathfrak{P}\mathfrak{w}]),$$

$$\text{(I″)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IV″)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(V″)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Dazu kommen die unseren Gleichungen (V′), (VI′) entsprechenden Relationen:

$$\text{(XXX)} \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} - \mathfrak{Q},$$

$$\text{(XXV) u. (XXI)} \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}.$$

Dabei haben wir im allgemeinen die Lorentzschen Bezeichnungen beibehalten; nur ist die Magnetisierung mit $\mathfrak{Q}$ (statt mit $\mathfrak{M}$) bezeichnet und es sind Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und Konvektionsstrom $\mathfrak{K}$ zu dem Stromvektor $\mathfrak{s}$ zusammengefaßt.

Offenbar gehen die Lorentzschen Differentialgleichungen in die unseren über, wenn wir die Lorentzschen Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{P}\mathfrak{w}]$*), $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ *bzw. mit* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{M}$ *identifizieren. Die beiden weiteren Gleichungen lassen sich für beliebige Körper nicht zur Übereinstimmung bringen.*

Bei nichtmagnetisierten Körpern ($\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$) *läßt sich aber Übereinstimmung erreichen, wenn man in* (V′), (VI′) *alle in* $\frac{\mathfrak{w}}{c}$ *quadratischen Glieder vernachlässigt;* dann bleibt nämlich (wegen (34′) und (39′)):

*) Minkowski identifiziert in § 9 der „Grundgleichungen" $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{m}$; daraus entspringt es, daß er die Übereinstimmung der Lorentzschen Formeln für nichtmagnetisierte Körper mit dem Relativitätsprinzip dem Umstande zuschreiben muß, daß Lorentz die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins in einer dem Prinzipe widersprechenden Weise ansetzt. Unsere Betrachtungsweise führt von selbst auf obige Zuordnung der Vektoren, wobei die schließliche Übereinstimmung nicht auf die Kompensation zweier Widersprüche zurückgeführt zu werden braucht.

$$
(42') \qquad \begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{M} - \mathfrak{Q} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{P}], \\ \mathfrak{e} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{P} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{Q}], \end{aligned}
$$

und die Formeln gehen für $\mathfrak{Q} = 0$ bei der oben angegebenen Zuordnung der Lorentzschen Vektoren zu den unseren in die Lorentzschen Relationen über.

Hieraus erhellt, daß unsere Bezeichnung des Vektors $\mathfrak{R}$, der bis auf Glieder 2. Ordnung durch $\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{P}]$ gegeben ist, als „Röntgen-Vektor" gerechtfertigt ist. Denn er gibt wie bei Lorentz zur Entstehung des Röntgenstroms Anlaß, und zwar in einer mit Eichenwalds Versuchen übereinstimmenden Weise (Enzykl., Bd. V 2, Art. 14, S. 210). Die Formeln (V'), (VI') sowohl, als auch die Näherungsformeln (42') unterscheiden sich von den Lorentzschen durch die volle Symmetrie*) zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen. Sie beruht vor allem auf dem Vorhandensein des Vektors $\mathfrak{S}$, der bis auf Glieder 2. Ordnung durch $\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{Q}]$ gegeben ist; dieser entspricht genau dem Röntgen-Vektor und zeigt elektrostatische Wirkungen bewegter, magnetisierter Körper an. *Erscheinungen, die durch diesen Vektor $\mathfrak{S}$ zu erklären sind, sind meines Wissens bislang experimentell noch nicht festgestellt worden*; es lassen sich aber unschwer Versuchsanordnungen angeben, die eine experimentelle Untersuchung über das Vorhandensein dieser Wirkung, die in $\frac{\mathfrak{w}}{c}$ von erster Ordnung ist, gestatten würden. Dieselbe ist nicht zu verwechseln mit der Erscheinung, daß ein Leiter, der sich im magnetischen Felde bewegt, in ruhenden Strombahnen Leitungsströme hervorruft (z. B. im Falle der sog. unipolaren Induktion); diese letztere Erscheinung ist eine Konsequenz der Formeln (E), S. 75, und man sieht leicht, daß sie bis auf Glieder 2. Ordnung ebenso wie in den Theorien von Hertz und Lorentz durch den Vektor $\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ bestimmt ist**), dessen Betrag leicht wesentlich größer gemacht werden kann als der des Vektors $\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{Q}]$, weil $\mathfrak{Q}$ bei den meisten Körpern nur wenig von Null verschieden ist.

---

*) Die Hertzschen Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper zeigen eine analoge Symmetrie, widersprechen aber bekanntlich dem Experiment und sind mit dem Relativitätsprinzip unvereinbar.

Ein Vergleich unserer Formeln mit den Grundgleichungen von E. Cohn erübrigt sich, da demselben der § 10 der Minkowskischen „Grundgleichungen" gewidmet ist.

**) Vgl. Lorentz, Enzykl. Bd. V 1, Art. 13, S. 100 u. S. 238, 239. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. I, § 86, 87, S. 398—409, und Bd. II (Elektromagnetische Theorie der Strahlung), 2. Aufl. 1908, § 36, S. 300—302.

Was die Glieder 2. Ordnung in $\frac{\mathfrak{w}}{c}$ anbetrifft, so scheint wenig Aussicht vorhanden zu sein, sie bei irdischen Experimenten aufzufinden.

Wir wollen nun noch zeigen, daß bei isotropen, nichtdispergierenden Körpern unsere Zusatzhypothesen (35) und (40) auf die Minkowskischen Formeln {C}, {D} zurückführen.

Nach § 8, (33) ist $wP = -p$ und nach § 9, S. 78, ist identisch $wQ = 0$. Daher folgt aus (20)

$$wf = wF - p.$$

Da nun $\Phi = -wF$ ist, so ergibt sich aus (35):

{C} $$wf = \varepsilon wF$$

oder

(C) $$\mathfrak{e} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{m}] = \varepsilon\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]\right).$$

Für die zu f, F, P, Q dualen Vektoren f^*, F^*, P^*, Q^* gilt nach (20) die Gleichung:

$$f^* = F^* + P^* + Q^*.$$

Nun ist offenbar

$$wP^* = w[w, p]^* = 0,$$

und nach § 9 (36) ist

$$wQ^* = -iq.$$

Daher wird

$$wf^* = wF^* - iq.$$

Da nun $\Psi = iwf^*$ ist, so folgt aus (40):

{D} $$wF^* = \mu wf^*$$

oder

(D) $$\mathfrak{M} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu\left(\mathfrak{m} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{e}]\right).$$

Damit sind wir zu dem vollständigen Formelsystem Minkowskis gelangt.

Wie schon hervorgehoben, gibt die größere Allgemeinheit unserer Formeln (42) die Möglichkeit an die Hand, komplizierteren Eigenschaften der Substanzen durch die Theorie gerecht zu werden; dazu sind nur die „Zusatzhypothesen“ (35), (40) durch andere zu ersetzen. Die Dispersion in bewegten Medien wird man z. B. erhalten, wenn man die Gleichung (35) durch geeignete Glieder so erweitert, daß der Vektor p Schwingungen träger Massen darzustellen fähig ist. Vorstehende Theorie, die eine Mittelstellung einnimmt zwischen der ursprünglichen rein phänomenologischen Methode Minkowskis und dem bis ins Detail der Elektronenbewegung eindringenden Verfahren von Lorentz, scheint also einerseits schmiegsam genug zu sein, die mannigfaltigen Eigenarten der Substanzen zum Ausdruck zu bringen, andererseits besitzt sie ein anschauliches Fundament, das ihrer bequemen Handhabung förderlich ist.

V. Heft: **Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, der festen Körper und des Lichtäthers.** Herausgegeben von Dr. Oskar Emil Meyer, Professor an der Universität Breslau. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1885. Geh. n. ℳ 11.60.

VI. — **Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.** Herausgegeben von Geheimem Hofrat Dr. Carl Neumann, Professor an der Universität Leipzig. Mit Figuren. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1887. Geh. n. ℳ 12.—

VII. — **Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität.** Herausgegeben von Geh. Regierungsrat Dr. A. Wangerin, Professor an der Universität Halle a. S. [X u. 234 S.] gr. 8. 1894. Geh n. ℳ 8.—

VIII. — **Vorlesungen über die Wärme.** Herausgegeben von Dr. J. Pernet, Professor in Zürich. gr. 8. Geh. [In Vorbereitung.]

Perry, Dr. J., F. R. S., Professor am Royal College of Science zu London, Drehkreisel. Deutsche Ausgabe von A. Walzel. Mit 58 Abbildungen und einem Titelbild. [VIII u. 125 S.] 8. 1904. Geb. n. ℳ 2.80.

Planck, Dr. M., Professor an der Universität Berlin, das Prinzip der Erhaltung der Energie. 2. Auflage. [XVI u. 278 S.] 8. 1908. Geb. n. ℳ 6.—

Pockels, Dr. Fr., Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Textfiguren und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. ℳ 16.—

Poincaré, H., Mitglied der französischen Akademie, Professor an der Faculté des Sciences der Universität Paris, sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und der mathematischen Physik. Gehalten zu Göttingen vom 22. bis 28. April 1909. Mit 6 Figuren. [IV u. 60 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. ℳ 1.80, geb. n. ℳ 2.40.

Richarz, Dr. F., Professor an der Universität Marburg, neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. Geb. n. ℳ 1.50.

——— Anfangsgründe der Maxwellschen Theorie verknüpft mit der Elektronentheorie. [IX u. 246 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 7.—. in Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Schaefer, Dr. C., Privatdozent an der Universität Breslau, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Mit Bildnis Maxwells und 32 Figuren. [VIII u. 174 S.] gr. 8. 1908. Kart. n. ℳ 3.40, geb. n. ℳ 3.80.

Schuster, A., Ph. D. Sc. D. F. R. S., Professor an der Universität Manchester, Einführung in die theoretische Optik. Autorisierte deutsche Ausgabe. Übersetzt von H. Konen. Mit 2 Tafeln und 185 Figuren. [XIV u. 413 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 12.—, geb. n. ℳ 13.—

Starke, Dr. H., Prof. an der Universität Greifswald, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 Abbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. Geb. n. ℳ 6.— [2. Auflage 1910. Unter der Presse.]

Study, Dr. E., Professor an der Universität Bonn, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 Figuren und 1 Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. Geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausg. von Felix Auerbach. Mit 1 Bildnis Lord Kelvins. I. Jahrgang 1909/10. [XLIV u. 450 S.] 8. 1909. Geb. n. ℳ 6.— II. Jahrgang. Herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. [Erscheint im Dezember 1910.]

Tesar, L., Professor an der Staatsrealschule in Wien, die Mechanik. Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. Mit 111 Figuren. [XIV u. 220 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 3.20, geb. n. ℳ 4.—

Thomson, J. J., Professor an der Universität Cambridge, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe, unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von E. Marx. Mit 187 Figuren. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. ℳ 18.—, geb. n. ℳ 19.—

Timerding, H. E., Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Figuren. [XII u. 381 S.] gr. 8. 1908. Geb. n. ℳ 16.—

Voigt, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.**, Professor an der Universität Göttingen, Magneto- und Elektrooptik. Mit zahlreichen Figuren. [XIV u. 396 S.] gr. 8. 1908. Geb. n. ℳ 14.—

——— Kristall-Physik. (Mit Ausnahme der Kristall-Optik.) A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint im Herbst 1910.]

Volkmann Dr. P., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.20.

——— Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf die elastische und elektromagnetische Anschauung. Mit Figuren. [XVI u. 432 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. ℳ 11.20.

Voß, Dr. **A.**, Professor an der Universität München, Prinzipien der rationellen Mechanik. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Wallentin, Dr. **J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. H., und **Dr. J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

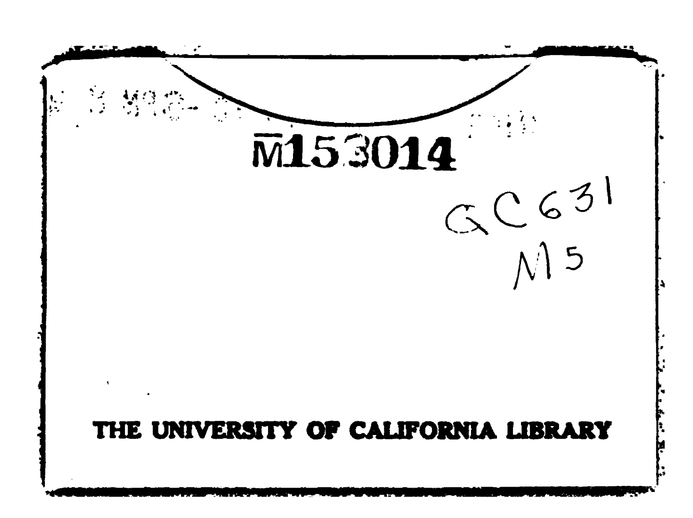
- I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1910. n. ℳ 10.—
- II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. n. ℳ 12.—
- III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Figuren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. ℳ 14.—

Weber, R., Professor in Neuchâtel (Schweiz), Beispiele und Übungen aus Elektrizität und Magnetismus. 8. Geh. u. geb. [In Vorbereitung.]

Webster, A. G., Ph. D., Professor of Physics, Clark University, Worcester, the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 588 S.] gr. 8 1904. Geb. n. ℳ 14.—

Wiechert, Dr. Emil, Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Elektrodynamik. A. u. d. T.: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals. II. Teil. [112 S.] gr. 8. 1899. Geh. n. ℳ 3.60.

Wien, Geheimer Hofrat Dr. **W.**, Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. 2., die Fortschritte der Wissenschaft berücksichtigende Auflage. [39 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 1.40.


M153014
GC631
M5
THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY



